УДК 534.08

# ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРУБЧАТЫХ РЕЗОНАТОРОВ ДЛЯ ВИБРАЦИОННО-ЧАСТОТНЫХ ПЛОТНОМЕРОВ ЖИДКИХ ПРОДУКТОВ

***Т.К. Гусейнов, Б.К. Амирасланов***

*Посвящена вопросу разработки обобщенной математической модели чувствительных элементов вибрационных плотномеров жидкости. С этой целью ставится и решается задача о собственных изгибных колебаниях однородной трубки, заполненной жидкостью и закреплённой на концах в заделках, упругих как к линейным, так и к угловым перемещениям.*

***Ключевые слова:*** *вибрационный, плотность, математическая модель, вибрационный плотномер, чувствительный элемент, вибрационно-частотный.*

***Key words:*** *vibrational, density, mathematical model, vibrational densitometer, sensitive element, vibrational- frequency.*

Одним из информативных параметров жидких продуктов, по которому можно судить о его качестве, является плотность [1]. Для измерения плотности жидких сред находят применение большое количество автоматических измерителей или плотномеров, среди которых своими метрологическими характеристиками выделяются вибрационно-частотные. Принцип действия этих приборов основывается на зависимости частоты автоколебаний трубчатого резонатора, выполняющего роль чувствительного элемента плотномера, близкой к собственной массе, а, следовательно, и плотности находящейся внутри него измеряемой жидкости [2].

Большое разнообразие конструкций резонаторов обусловливает и разнообразие их математических моделей. Однако, как показал анализ, в действительности существующие конструкции резонаторов могут быть сведены, по крайней мере, к двум обобщенным моделям: однородная трубка, закрепленная на концах в упругих к поперечным и угловым перемещениям заделках, или неоднородная трубка при тех же условиях закрепления. Соответственно все известные на сегодняшний день математические модели резонаторов могут быть обобщены и представлены двумя моделями.

Настоящая работа посвящена разработке одной из этих моделей, а именно обобщенной математической модели однородных трубчатых резонаторов.

С учетом вышесказанного дифференциальное уравнение собственных частот колебаний резонатора запишется следующим образом:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + (m_т + m_ж)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

где $EI$ – жесткость при изгибе в плоскости колебаний; $E$ – модуль упругости; $I$ – статический момент инерции поперечного сечения трубки относительно оси колебаний; $y$ – отклонение оси трубки, являющееся функцией времени $t$ и положения точки на трубке, определяемой координатой $x$; $m_т$ и $m_ж$ – соответственно, массы единицы длины трубки и жидкости.

Полагаем, что

$$y(x,t) = v(t)z(x)$$

где $z(x)$ – решение дифференциального уравнения IY порядка

$$z^{IY} - \nu^4 z = 0\,, \tag{2}$$

а $v(t)$ – решение дифференциального уравнения 2-порядка

$$\ddot{v}_i + \omega v_i = 0\,, \tag{3}$$

$$\omega = \nu^2 \sqrt{\frac{EI}{m_m + m_{ж}}}\,. \tag{4}$$

Здесь $\omega = 2\pi f_0$ ( $f_0$ – собственная частота колебаний трубки) – круговая частота колебаний.

Общее решение уравнения (2) согласно метода А.Н.Крылова имеет вид

$$z(x) = AS(\nu x) + BT(\nu x) + CU(\nu x) + DV(\nu x)\,, \tag{5}$$

где $A, B, C, D$ – произвольные постоянные, находимые из граничных условий, а $S(\nu x), T(\nu x), U(\nu x), V(\nu x)$ – функции А.Н. Крылова в общепринятых обозначениях.

Граничные условия определяются условиями закрепления концов резонатора. Рассмотрим наиболее общий случай, когда оба конца резонатора закреплены в опорах, упругих по отношению как к линейным, так и к угловым перемещениям.

С учетом вышесказанного граничные условия запишутся следующим образом.

При $x = 0$:

$$\begin{gathered} k_1 y = -EI\,\frac{d^3 y}{dx^3}; \\ \mu_1 \frac{dy}{dx} = EI\,\frac{d^2 y}{dx^2} \end{gathered} \tag{6}$$

При $x = l$

$$\begin{gathered} k_2 y = EI\frac{d^3 y}{dx^3}; \\ \mu_2 \frac{dy}{dx} = EI\frac{d^2 y}{dx^2} \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $k_i, \mu_i; i = 1,2$ – соответственно, линейная и угловая жесткости опор. Из условий на левом конце $(x = 0)$ вытекает, что

$$\begin{gathered} A = -\frac{EI\nu^3}{k_1} D(\nu x), \\ B = \frac{EI\nu}{\mu_1} C(\nu x) \end{gathered} \tag{8}$$

Условия при $x = l$ приводят к равенствам:

$$\begin{aligned}
&k_2(AS(\nu l) + BT(\nu l) + CU(\nu l) + D(\nu l) = -EI\nu^3(AT(\nu l) + BU(\nu l) + CV(\nu l) + DS(\nu l);\\
&\mu_2\nu(AV(\nu l) + BS(\nu l) + CT(\nu l) + DU(\nu l)) = EI\nu^2(AU(\nu l) + BV(\nu l) + CS(\nu l) + DT(\nu l))
\end{aligned} \tag{9}$$

Учитывая (8), в (9) получаем:

$$\begin{aligned}
&D\left[-\frac{(EI)^2\nu^6T(\nu l)}{k_1} + k_2V(\nu l) + EI\nu^3S(\nu l) - EI\nu^3S(\nu l)\frac{k_2}{k_1}\right] +\\
&+C\left[EI\nu T(\nu l)\frac{k_2}{\mu_1} + U(\nu l)k_2 + \frac{(EI)^2\nu^4}{\mu_1}U(\nu l) + EI\nu^3V(\nu l)\right];\\
&D\left[\frac{(EI)^2\nu^5U(\nu l)}{k_1} - \frac{EI\nu^4\mu_2V(\nu l)}{k_1} + \mu_2\nu U(\nu l) - EI\nu^2T(\nu l)\right] +\\
&+C\left[\mu_2\nu T(\nu l) - \frac{(EI)^2\nu^{\#}V(\nu l)}{\mu_1} + \frac{EI\nu^2S(\nu l)\mu_2}{\mu} - EI\nu^2S(\nu l)\right]
\end{aligned} \tag{10}$$

Приравнивая к нулю определитель системы (10), приходим к следующему частотному уравнению:

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{(EI)^2\nu^6T(\nu l)}{k_1} + k_2V(\nu l) + EI\nu^3S(\nu l) - EI\nu^3S(\nu l)\frac{k_2}{k_1}\right]*\\
&*\left[\mu_2\nu T(\nu l) - \frac{(EI)^2\nu^3V(\nu l)}{\mu_1} + \frac{EI\nu^2S(\nu l)\mu_2}{\mu_1} - EI\nu^2S(\nu l)\right] -\\
&-\left[EI\nu T(\nu l)\frac{k_2}{\mu_1} + U(\nu l)k_2 + \frac{(EI)^2\nu^4U(\nu l)}{\mu_1} + EI\nu^3V(\nu l)\right]*\\
&*\left[\frac{(EI)^2\nu^5U(\nu l)}{k_1} - \frac{EI\nu^4V(\nu l)\mu_2}{k_1} - \mu_2U(\nu l)\nu - EI\nu^2T(\nu l)\right] = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим применительно к уравнению (11) частный случай $k_2 = \mu_2 = 0$ (консольно закрепленная трубка), тогда получаем

$$S^2(\nu l) - T(\nu l)V(\nu l) = 0 \tag{12}$$

или

$$ch(\nu l)\cos(\nu l) + 1 = 0\,. \tag{13}$$

Видим, что уравнение (13) представляет собой частотное уравнение консольной трубки постоянного сечения со свободным концом, как и следовало ожидать.

Проверка других частных случаев, охватывающих наиболее распространенные условия закрепления концов резонаторов, также подтверждают достоверность полученного нами обобщенного уравнения частот колебаний однородных трубчатых резонаторов для поточных вибрационных плотномеров жидких сред.

**Библиографический список**

1. ***Жуков, Ю. П.*** Вибрационные плотномеры / Ю. П. Жуков. – М. : Энергоатомиздат, 1991.
2. ***Петров, И. К.*** Технологические измерения и приборы в пищевой промышленности / И. К. Петров. – М. : Агропромиздат, 1985.