

DOI 10.21672/2074-1707.2019.48.4.110-120

УДК 330.42, 339.133, 519.2, 004.942

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СПРОСА ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ПРЕДЛОЖЕНИИ ТОВАРА НА РЫНКЕ

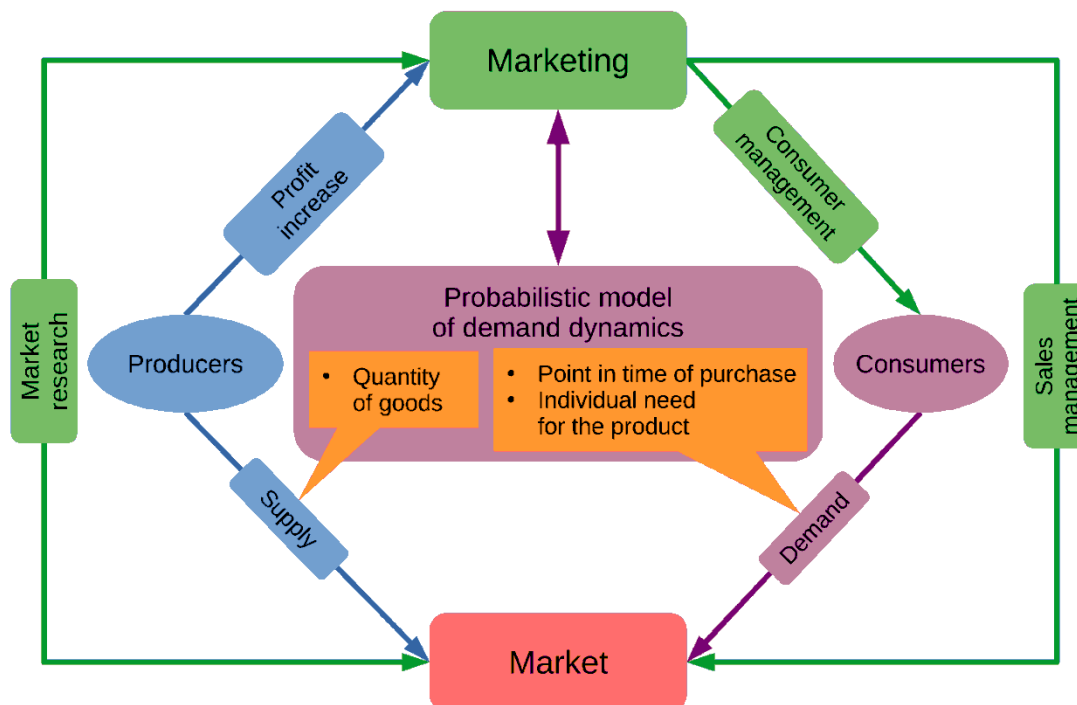
Статья получена редакцией 30.04.2019, в окончательном варианте – 21.11.2019.

Михеев Андрей Вячеславович, Казанский национальный исследовательский технологический университет, 420015, Российская Федерация, г. Казань, ул. К. Маркса, 68, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: veehima@gmail.com

Построена вероятностная модель спроса на товар, количество которого на рынке ограничено. Новизна модели состоит в том, что математические ожидания спроса и интенсивности спроса представлены в ней в виде функционалов, определённых на множестве функций распределения вероятности экономических величин, описывающих взаимодействие производителей и потребителей на рынке товара. Показано, что стохастическая динамика спроса определяется двумя случайными величинами: моментами времени покупок товара и количеством товара, приобретаемого одним потребителем. Установлено, что временная зависимость спроса на товар представляет собой полином Бернштейна, аргументом которого является функция распределения моментов времени покупок товара, т.е. вероятность того, что момент покупки меньше или равен текущему моменту времени. Степень полинома определяется количеством потребителей на рынке, а коэффициенты полинома Бернштейна зависят от закона распределения количества товара, приобретаемого одним потребителем при условии, что предложение товара ограничено. Найдено аналитическое выражение для зависимости от времени интенсивности спроса (функции, определяющей кривую жизненного цикла товара) через аналогичные полиномы Бернштейна. Проведено численное моделирование найденных временных зависимостей для частных законов распределения указанных случайных величин. Исследовано влияние параметров этих законов распределения на жизненный цикл товара.

Ключевые слова: спрос, предложение, кривая жизненного цикла товара, дефицит товара, плотность распределения вероятности, функция распределения вероятности, математическое ожидание, полиномы Бернштейна

Графическая аннотация (Graphical annotation)



PROBABILISTIC MODEL OF THE DEMAND DYNAMICS
WITH FIXED SUPPLY OF GOODS ON THE MARKET

The article was received by the editorial board on 30.04.2019, in the final version – 21.11.2019.

Mikheev Andrey V., Kazan National Research Technological University, 68 Karl Marks St., Kazan, 420015, Russian Federation,
Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, e-mail: veehima@gmail.com

A probabilistic model of demand for goods, the amount of which in the market is limited, was developed. The novelty of the model is that the expected values of demand and demand intensity are presented in it in the form of functionals defined on the set of probability distribution functions of economic quantities that describe the interaction of producers and consumers in the product market. It is shown that, with fixed supply, stochastic demand dynamics is determined by two random variables: the points in time of purchase of goods and the number of units of goods purchased by one consumer. It was found that the time dependence of the demand for a product is a Bernstein polynomial, the argument of which is the cumulative distribution function of the moments of time of goods purchase, i.e. the probability that the moment of purchase is less than or equal to the current point in time. The degree of a polynomial is determined by the number of consumers in the market, and Bernstein coefficients depend on the law of distribution of the quantity of goods purchased by one consumer, provided that the supply of goods is limited. An analytical expression was found for the time dependence of the intensity of demand (the function defining the curve of the product life cycle) through similar Bernstein polynomials. For particular laws of the random variables distribution, a numerical simulation of the established time dependencies was carried out. The influence of the parameters of these distribution laws on the product life cycle was investigated.

Key words: demand, supply, product life cycle curve, shortage of goods, probability density function, cumulative distribution function, expected value, Bernstein polynomials

Введение. Существующие в настоящее время подходы к моделированию экономической и популяционной динамики основаны на таких разделах математики, как теория динамических систем, динамическое программирование, теория игр, теория марковских цепей, теория ветвящихся процессов и др. [2, 4, 6–8, 11, 12]. В большинстве случаев при построении моделей, описывающих эволюцию во времени некоторой экономической системы, предполагается, что эта система строго детерминирована. Её параметры не являются случайными величинами, и их динамика может быть найдена как решение либо разностного уравнения – для системы с дискретным временем, либо дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений) – для системы с непрерывным временем [11]. Использование дифференциальных (разностных) уравнений в качестве инструмента математического моделирования экономической динамики обладает следующими достоинствами:

1. Все величины, входящие в такие уравнения, легко наделяются правдоподобным экономическим смыслом.
2. Для качественного и количественного анализа решений дифференциальных (разностных) уравнений может быть использован развитый математический аппарат теории динамических систем.
3. Анализ динамики параметров экономической системы на устойчивость к изменению начальных значений этих параметров выполнять достаточно просто.
4. Имеется возможность отыскания равновесных состояний экономической системы и оптимальных в некотором смысле траекторий её развития.

Предположение о детерминированности экономической системы является вполне приемлемым, если речь идёт о макроэкономике. Однако оно не вполне применимо к изначально стохастической динамике микроэкономических параметров [2]. Например, спрос и предложение на рынке товара формируются в результате полностью или частично несогласованного поведения на рынке большого числа потребителей и производителей товаров, причем в общем случае не только данного товара, но и тех, которые могут служить его заменителями. Поэтому динамика спроса и предложения будет стохастической в любой момент времени, а не только при определённом соотношении параметров нелинейной динамической системы, как в случае детерминированного хаоса [12]. Моделирование динамики спроса и предложения с помощью разностных или дифференциальных уравнений возможно и в этом случае. Однако в эти уравнения в качестве неизвестных функций должны входить не спрос и предложение, являющиеся случайными величинами, а их вероятностные характеристики: плотность распределения вероятности, математическое ожидание, начальные или центральные моменты, мода, медиана и др. При этом важно, чтобы существование таких уравнений имело строгие экономическое и математическое обоснования. Примерно так поступают при использовании теории марковских цепей для описания динамики экономических си-

стем: решением разностных и дифференциальных уравнений являются вероятности отдельных состояний экономической системы [4].

Существующие вероятностные модели в микроэкономике, опирающиеся на динамическое программирование, теории динамических систем и марковских цепей, обладают одним общим недостатком: в них явным образом, не учитываются такие простейшие случайные процессы, протекающие на рынке товара, как поставка товара на рынок и определение условий его продажи, принятие и реализация потребителем решения о покупке товара. В то же время взаимодействие именно этих процессов определяет как статику, так и динамику спроса, предложения, равновесной цены и других важнейших микроэкономических величин. Поэтому математическая модель, построенная как детальное вероятностное описание этого взаимодействия, была бы реалистичной и очень полезной для маркетинга. Пример такой модели можно найти в работе [5].

Один из создателей современной теории менеджмента Питер Друкер писал: «Цель маркетинга – сделать усилия по сбыту ненужными. Его цель – так хорошо познать и понять клиента, что товар или услуга будут точно подходить последнему и продавать себя сами» [3]. Как показано в [5], с вероятностной точки зрения «познать и понять клиента» – это значит определить в ходе статистического исследования рынка эмпирические законы распределения таких случайных величин, как покупательская способность потребителя; моменты времени совершения им покупок; количество товара, приобретаемого одним потребителем, и др. Чтобы эффективно пользоваться данной информацией для достижения главной цели маркетинга, необходимо установить связь этих законов распределения с функциями спроса, предложения, прибыли; определить их влияние на жизненный цикл товара. В [5] впервые было показано, как законы распределения случайных величин, определяющих рыночное поведение потребителей, формируют стохастическую динамику спроса и предложения. Однако в [5] предполагалось, что товара на рынке неограниченно много и исследовалась динамика равновесной рыночной цены на товар, а не спроса на него.

Целью настоящей работы является создание математической модели, позволяющей находить временную зависимость спроса и его интенсивности при ограниченном предложении товара на рынке, на основе вероятностного описания основных характеристик рыночной активности потребителей: моментов времени покупок товара и количества товара, приобретаемого одним потребителем.

Научная новизна работы заключается в последовательном вероятностном подходе к построению модели: экономические величины, характеризующие взаимодействие потребителей и производителей на рынке товара, считаются случайными и описываются с помощью функций (или плотностей) распределения вероятности. Временные зависимости математического ожидания спроса и интенсивности спроса на товар, следующие из построенной модели, являются функциями, определёнными на множестве этих функций распределения вероятности.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования построенной модели для управления динамикой реальных экономических систем: в функционалах спроса и интенсивности спроса на товар можно использовать эмпирические оценки функций распределения вероятности экономических величин, присущие конкретному рынку товара. Это позволит в ходе численного моделирования установить, как нужно изменять значения параметров этих функций распределения, чтобы добиться желаемого поведения потребителей, например, такого, которое увеличивает спрос на товар.

Общие положения вероятностной модели. Предположим, что на рынке некоторого товара имеется N_c потребителей, заинтересованных в его покупке. Количество товара на рынке ограничено и составляет N_g единиц. В момент времени $t = t_j^{(c)}$ j -й потребитель предполагает купить $n_j^{(c)}$ необходимых ему единиц товара. Здесь и далее $j = 1, 2, K, N_c$. Тактика поведения потребителя на рынке такова, что если $n_j^{(c)}$ больше количества товара, оставшегося на рынке к моменту времени $t = t_j^{(c)}$, то j -й потребитель покупает все остатки товара.

Чтобы не усложнять модель и вычленив влияние ограниченного количества товара на спрос и интенсивность спроса, будем считать, что все потребители располагают таким количеством денежных средств, которое позволяет им купить любое доступное на рынке количество товара. Таким образом, в отличие от [5], мы не будем учитывать покупательскую способность потребителей.

Для того чтобы установить динамику спроса на товар при условии, что его количество на рынке постепенно уменьшается, удобно перейти от моментов времени $t_j^{(c)}$ к упорядоченным по «неубыванию» моментам времени: $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq K \leq t_{(N_c)}$. Таким образом, $t_{(j)}$ представляет собой j -ю порядко-

вую статистику для множества случайных моментов времени покупок товара. Количество товара, которое предполагает купить в момент времени $t_{(j)}$ один из потребителей, обозначим через n_j . Характер связи n_j с $n_j^{(c)}$ для определения динамики спроса не существен, так как n_j можно рассматривать как новую случайную величину, имеющую практически тот же смысл, что и $n_j^{(c)}$.

Будем считать, что поведение различных потребителей на рынке не является согласованным: потребитель при совершении покупки не учитывает опыт предшествующих покупок товара и не корректирует своё рыночное поведение, исходя из планов будущих покупок, имеющихся у других потребителей. Тогда случайные величины n_j и $t_j^{(c)}$ попарно независимы. Если также считать, что в основе рыночного поведения потребителей лежат одни и те же принципы, то законы распределения случайных величин n_j и $t_j^{(c)}$ будут одинаковы для всех потребителей товара, т.е. не будут зависеть от номера j . Обозначим плотность распределения вероятности случайной величины $t_j^{(c)}$ через $\varphi_c(x)$, а вероятности отдельных значений случайной величины n_j через $p_n(m) \equiv P(n_j = m)$, где m пробегает все возможные значения случайной величины n_j . Пусть $\varphi_j(x)$ – функция плотности распределения вероятности j -й порядковой статистики $t_{(j)}$. Тогда она связана с $\varphi_c(x)$ следующим образом [9]:

$$\varphi_j(x) = N_c C_{N_c-1}^{j-1} \varphi_c(x) \cdot (F_c(x))^{j-1} (1 - F_c(x))^{N_c-j}, \quad (1)$$

где $F_c(x) = \int_0^x \varphi_c(t) dt$ – интегральная функция распределения вероятности случайной величины $t_j^{(c)}$; $C_{N_c-1}^{j-1}$ – биномиальный коэффициент.

Зависимость от времени математического ожидания спроса и интенсивности спроса на товар. Пусть $Q_d(t)$ – совокупный спрос на товар в момент времени t . Тогда покупка товара в момент времени $t_{(j)}$ произойдёт только в том случае, если $N_g - Q_d(t_{(j-1)}) > 0$, т.е. если товар к моменту времени $t_{(j)}$ ещё не закончился. При этом количество товара, которое будет куплено в момент времени $t_{(j)}$, равно либо n_j при $n_j < N_g - Q_d(t_{(j-1)})$, либо $N_g - Q_d(t_{(j-1)})$ при $n_j \geq N_g - Q_d(t_{(j-1)})$. Таким образом, индивидуальный спрос в момент времени $t_{(j)}$ равен:

$$D_j = \min(n_j, N_g - Q_d(t_{(j-1)})) \cdot H(N_g - Q_d(t_{(j-1)}) > 0), \quad j = 1, 2, K, N_c, \quad (2)$$

где $H(A)$ – индикаторная функция: $H(A) = 1$, если утверждение A истинно и $H(A) = 0$, если утверждение A ложно; $t_{(0)} \equiv 0$ и $Q_d(0) = 0$, т.е. до момента времени $t = 0$ не было куплено ни одной единицы товара. Поскольку индивидуальный спрос в момент времени $t_{(j)}$ не равен нулю, только если $N_g - Q_d(t_{(j-1)}) > 0$, то во все предшествующие моменты времени $t_{(1)}, t_{(2)}, K, t_{(j-1)}$ потребители совершали покупки в соответствии с их потребностями. Следовательно, в уравнении (2) необходимо положить $Q_d(t_{(j-1)}) = \sum_{k=1}^{j-1} n_k$.

Учитывая, что совокупный спрос ΔQ_d на промежутке времени $[t; t + \Delta t]$ равен сумме тех индивидуальных спросов, для которых момент покупки товара принадлежит этому промежутку времени, находим:

$$\Delta Q_d = \sum_{j=1}^{N_c} D_j \cdot H(t \leq t_{(j)} \leq t + \Delta t). \quad (3)$$

Переход в уравнении (3) к пределу $\Delta t \rightarrow 0$ приводит нас к дифференциальному уравнению для мгновенного совокупного спроса $Q_d(t)$:

$$Q'_d(t) = \sum_{j=1}^{N_c} D_j \cdot \delta(t - t_{(j)}), \quad (4)$$

где $Q'_d(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta Q_d / \Delta t$ – производная по времени от функции спроса (интенсивность спроса в момент времени t); $\delta(t - t_{(j)}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} H(t \leq t_{(j)} \leq t + \Delta t) / \Delta t$ – дельта-функция Дирака.

Интегрируя по переменной t обе части равенства (4) и учитывая, что $Q_d(0) = 0$, находим временную зависимость мгновенного совокупного спроса на товар:

$$Q_d(t) = \sum_{j=1}^{N_c-1} S_j \cdot H(t_{(j)} \leq t < t_{(j+1)}) + S_{N_c} \cdot H(t \geq t_{(N_c)}), \quad (5)$$

где $S_j \equiv Q_d(t_{(j)}) = \sum_{k=1}^j D_k$ – совокупный спрос в момент времени $t_{(j)}$. Из формулы (2) следует, что члены последовательности S_j удовлетворяют рекуррентному уравнению $S_j = S_{j-1} + \min(n_j, N_g - S_{j-1})$ с граничным условием $S_0 = 0$. Решение этого рекуррентного уравнения при $n_j \geq 0$ имеет вид:

$$S_j = H(\sigma_j \leq N_g) \cdot \sigma_j + N_g \cdot (1 - H(\sigma_j \leq N_g)), \quad \sigma_j = \sum_{k=1}^j n_k, \quad j = 1, 2, K, N_c. \quad (6)$$

Пусть $F_n(x) = \sum_{m \leq x} p_n(m)$ – функция распределения случайной величины n_j , одинаковая для всех $j = 1, 2, K, N_c$. В силу сделанного ранее предположения о независимости случайных величин n_1, n_2, K, n_j функция распределения $F_\sigma(j, x) = \sum_{m \leq x} p_\sigma(j, m)$ случайной величины σ_j представляет собой j -кратную свёртку функций распределения $F_n(x)$:

$$F_\sigma(j, x) = \underbrace{F_n(x) * F_n(x) * \dots * F_n(x)}_j, \quad F_n(x) * F_n(x) = \int_0^x F_n(x-y) dF_n(y), \quad (7)$$

где $p_\sigma(j, m) \equiv P(\sigma_j = m)$ – вероятности возможных значений m случайной величины σ_j .

Из уравнения (5) следует, что для нахождения математического ожидания совокупного спроса $\tilde{Q}_d(t) = E(Q_d(t))$, кроме законов распределения (1) и (7), необходима совместная плотность распределения порядковых статистик $t_{(j)}$ и $t_{(j+1)}$ [9]:

$$\varphi_{t_{(j)}, t_{(j+1)}}(x_1, x_2) = \frac{N_c! \varphi_c(x_1) \varphi_c(x_2)}{(j-1)!(N_c-j-1)!} (F_c(x_1))^{j-1} (1 - F_c(x_2))^{N_c-j-1} H(x_1 \leq x_2). \quad (8)$$

С помощью (1), (7), (8) из (5) и (6) находим зависимость от времени среднего совокупного спроса на товар:

$$\tilde{Q}_d(t) = \sum_{j=0}^{N_c} \tilde{S}_j \cdot C_{N_c}^j \cdot (F_c(t))^j (1 - F_c(t))^{N_c-j}, \quad (9)$$

$$\tilde{S}_j = E(S_j) = \sum_{m=0}^{N_g} m \cdot p_\sigma(j, m) + N_g \cdot \left(1 - \sum_{m=0}^{N_g} p_\sigma(j, m) \right), \quad j = 1, 2, K, N_c, \quad \tilde{S}_0 = 0. \quad (10)$$

Уравнение (9) определяет средний совокупный спрос в виде полинома Бернштейна функции $f(j) \equiv \tilde{S}_j$. При этом аргументом полинома Бернштейна является интегральная функция распределения вероятности $F_c(t)$ неупорядоченных моментов времени $t_j^{(c)}$, в которые потребители совершают покупки товара:

$$\tilde{Q}_d(t) = B_{N_c}^f(F_c(t)), \quad B_{N_c}^f(x) = \sum_{j=0}^{N_c} f(j) C_{N_c}^j x^j (1-x)^{N_c-j}. \quad (11)$$

Подробнее о свойствах и применениях полиномов Бернштейна можно прочесть в [10]. Поскольку полином Бернштейна, при стремлении его степени к бесконечности, равномерно сходится к функции, для которой он записан, то из (11) следует асимптотическое равенство:

$$\tilde{Q}_d(t) \sim k(N_c) f(F_c(t)), \quad N_c \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Характер зависимости коэффициента пропорциональности $k(N_c)$ от количества потребителей N_c определяется видом функции $f(j)$.

Из уравнения (11) легко найти динамику средней интенсивности спроса (среднего числа покупок, совершаемых в единицу времени), когда количество товара на рынке ограничено. Используя хорошо известное выражение для производной от полинома Бернштейна, получаем:

$$\tilde{Q}_d'(t) = N_c \varphi_c(t) B_{N_c-1}^f(F_c(t)), \quad B_{N_c-1}^f(x) = \sum_{j=0}^{N_c-1} \Delta f(j) C_{N_c-1}^j x^j (1-x)^{N_c-1-j}, \quad (13)$$

где $\Delta f(j) \equiv \tilde{S}_{j+1} - \tilde{S}_j$ – средний индивидуальный спрос в момент времени $t_{(j+1)}$. С помощью (1) уравнению (13) можно придать следующий, более простой вид:

$$\tilde{Q}_d'(t) = \sum_{j=1}^{N_c} (\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1}) \cdot \varphi_j(t). \quad (14)$$

Отметим, что уравнение (14) можно также получить, вычисляя математическое ожидание от обеих частей равенства (4). Как и в случае функции спроса, из (13) можно найти асимптотику средней интенсивности спроса при большом количестве потребителей на рынке:

$$\tilde{Q}_d'(t) \sim N_c K(N_c) \varphi_c(t) \Delta f(F_c(t)), \quad N_c \rightarrow \infty, \quad (15)$$

где $K(N_c)$ – коэффициент пропорциональности, зависящий от вида функции $\Delta f(j)$.

Зависимость от времени средней интенсивности спроса, определяемая уравнениями (13), (14), представляет собой одну из разновидностей функций, описывающих жизненный цикл товара на рынке [3]. График этой зависимости называется кривой жизненного цикла товара. Таким образом, кривая жизненного цикла товара определяется функцией, пропорциональной произведению полинома Бернштейна с аргументом $F_c(t)$, записанного для среднего индивидуального спроса $\tilde{S}_{j+1} - \tilde{S}_j$, на плотность распределения вероятностей $\varphi_c(t)$ неупорядоченных моментов времени, в которые совершаются покупки товара.

Динамика спроса и его интенсивности при отсутствии дефицита товара. Предположим, что товар не является дефицитным и каждый из N_c потребителей покупает столько единиц товара, сколько планировал купить. Это значит, что выполняется неравенство $\sigma_{N_c} \leq N_g$. В этом случае, как следует из (6), $S_j = \sigma_j$ при всех $j = 1, 2, \dots, N_c$. Следовательно,

$$\tilde{S}_j = E(\sigma_j) = E\left(\sum_{k=1}^j n_k\right) = \tilde{n} \cdot j, \quad \text{где } \tilde{n} = E(n_j) = \sum_m m \cdot p_n(m) - \text{математическое ожидание случайной}$$

величины n_j , т.е. среднее количество товара, приобретаемого одним потребителем. Уравнения (9)

и (14) при $\tilde{S}_j = \tilde{n} \cdot j$ приобретают вид:

$$\tilde{Q}_d'(t) = \tilde{n} N_c \varphi_c(t), \quad \tilde{Q}_d(t) = \tilde{n} N_c F_c(t). \quad (16)$$

Формулы (16) показывают, что при отсутствии дефицита товара зависимость от времени среднего спроса $\tilde{Q}_d(t)$ имеет форму функции распределения $F_c(t)$ неупорядоченных моментов времени, в которые потребители совершают покупки, а кривая жизненного цикла товара $\tilde{Q}_d'(t)$ повторяет форму плотности распределения вероятности $\varphi_c(t)$ этих моментов времени. В силу этого средний спрос $\tilde{Q}_d(t)$ является неубывающей функцией времени, график которой имеет вид кривой с насыщением: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{Q}_d(t) = \tilde{n} N_c$ – количество товара, полностью удовлетворяющее потребность покупа-

телей в этом товаре. Таким образом, величина спроса ограничена сверху значением $\tilde{n}N_c$. После завершения продаж на рынке остаются нераспроданными в среднем $N_g - \tilde{n}N_c$ единиц товара.

Обычно на кривой жизненного цикла товара выделяют стадии роста, зрелости и упадка [3]. Как видно из уравнения (16), когда товар не дефицитен, длительность этих стадий целиком определяется покупательской активностью потребителей в разные промежутки времени. В некоторых случаях отдельные стадии могут отсутствовать на кривой жизненного цикла. Например, при равномерном распределении моментов времени $t_j^{(c)}$ функции $\varphi_c(t)$ и $F_c(t)$ имеют вид:

$$\varphi_c(t) = H(0 \leq t \leq T)/T, \quad F_c(t) = t \cdot H(0 \leq t \leq T)/T + H(t > T), \quad (17)$$

где T – период активности потребителей на рынке. При этом кривая жизненного цикла целиком состоит из одной стадии – стадии зрелости, длительность которой равна T . Равномерное распределение (17) означает, что товар хорошо знаком потребителю и пользуется у него устойчивым спросом. Поскольку товара на рынке много, потребители раскупают его с постоянной во времени интенсивностью до тех пор, пока полностью не удовлетворят свои потребности в этом товаре. Длительность стадий роста и упадка при этом равна нулю.

Динамика спроса и его интенсивности при дефиците товара на рынке. При наличии дефицита товара, т.е. при выполнении неравенства $N_g < \sigma_{N_c}$, временные зависимости функций спроса и жизненного цикла товара, определяемые уравнениями (9), (14), отличаются от простых зависимостей (16). Причём тем сильнее, чем больше товара не хватает на рынке. Изменения в (9), (14), по сравнению с (16), прежде всего касаются участков зрелости и упадка. Каким бы ни был закон распределения случайных величин n_j , т.е. для любых вероятностей $p_n(m)$, при дефиците товара на рынке, суммы в (9), (14) не содержат некоторое количество слагаемых с номерами вблизи $j = N_c$, которые как раз определяют длительность и форму стадий зрелости, упадка на кривых спроса и жизненного цикла товара. Характер изменений этих стадий существенно зависит от того, как распределено количество товара, планируемое к покупке одним потребителем. Однако, как следует из уравнений (9), (14), независимо от этого распределения, увеличение дефицита товара (увеличение разности $\sigma_{N_c} - N_g$) на рынке всегда уменьшает длительность жизненного цикла товара.

Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах. Предположим вначале, что количество товара, которое собирается приобрести один потребитель, имеет вырожденный (причинный) закон распределения:

$$p_n(m) = H(m = \tilde{n}), \quad p_\sigma(j, m) = H(m = j \cdot \tilde{n}), \quad j = 0, 1, K, N_c. \quad (18)$$

Закон распределения (18) означает, что все потребители планируют приобрести одно и то же количество товара, равное $\tilde{n}$: $n_j = \tilde{n}$, $\forall j$. Подстановка (18) в (10) приводит нас к следующему выражению для коэффициентов полинома Бернштейна:

$$\tilde{S}_j = j \cdot \tilde{n} \cdot H(j \leq N_g / \tilde{n}) + N_g \cdot H(j > N_g / \tilde{n}), \quad j = 0, 1, K, N_c. \quad (19)$$

Предполагая, что $N_c > N_g / \tilde{n}$ (дефицит товара на рынке), с помощью (19), (9) и (13) находим аналитические выражения для временной зависимости спроса и интенсивности спроса на товар:

$$\tilde{Q}_d(t) = \tilde{n} N_c F_c(t) I_{1-F_c(t)}(N_c - \lfloor N_g / \tilde{n} \rfloor \lfloor N_g / \tilde{n} \rfloor) + N_g I_{F_c(t)}(\lfloor N_g / \tilde{n} \rfloor + 1, N_c - \lfloor N_g / \tilde{n} \rfloor), \quad (20)$$

$$\tilde{Q}'_d(t) = \tilde{n} N_c \varphi_c(t) \cdot (I_{1-F_c(t)}(N_c - \lfloor N_g / \tilde{n} \rfloor \lfloor N_g / \tilde{n} \rfloor) + \{N_g / \tilde{n}\} \cdot b_{\lfloor N_g / \tilde{n} \rfloor, N_c-1}(F_c(t))), \quad (21)$$

где $\lfloor x \rfloor$ – целая часть числа x , т.е. ближайшее целое число, меньшее или равное x ; $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ – дробная часть числа x ; $I_x(a, b) = B(x; a, b) / B(1; a, b)$ – регуляризованная неполная бета-функция;

$B(x; a, b) = \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$ – неполная бета-функция; $b_{m,s}(x) = C_s^m x^m (1-x)^{s-m}$ – базисный многочлен Бернштейна.

На рисунке 1 представлены кривые спроса и жизненного цикла товара, рассчитанные с помощью уравнений (20), (21), в случае, когда моменты покупок товара имеют равномерное распределение (17). Для сравнения на этом же рисунке приведены аналогичные кривые при отсутствии дефицита товара (использовались формулы (16)). Из рисунка 1 следует, что при отсутствии дефицита товара кривая жизненного цикла действительно не имеет стадий роста и упадка. Наличие дефицита приводит к появлению стадии упадка и уменьшению длительности жизненного цикла товара: чем больше $\tilde{n}$, тем короче жизненный цикл. Следовательно, нехватка товара при его ограниченном

предложении вызывает уменьшение со временем интенсивности спроса на товар: по мере того как запасы товара на рынке заканчиваются, не все потребители оказываются способными удовлетворить свои потребности в нём в полной мере и вынуждены покупать его меньше, чем хотели бы.

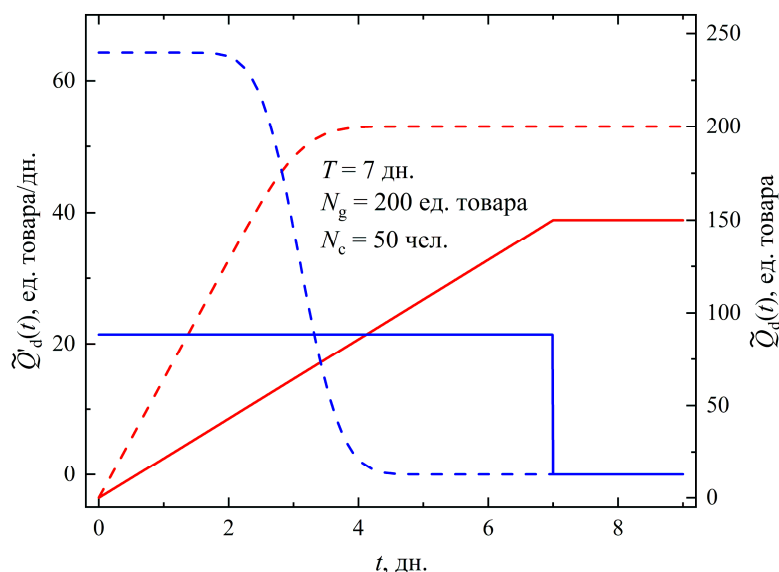


Рисунок 1 – Кривые спроса (красные линии, правая шкала) и жизненного цикла товара (синие линии, левая шкала), рассчитанные по формулам (16), (17), (20), (21). Для сплошных линий $\tilde{n} = 3$ (нет дефицита товара). Для пунктирных линий $\tilde{n} = 9$ (есть дефицит товара)

Из рисунка 1 также следует, что наличие дефицита товара меняет временную зависимость спроса не так радикально, как кривую жизненного цикла товара. Во всех случаях график функции спроса имеет вид логистической кривой с линейным нарастанием до стадии насыщения при отсутствии дефицита товара и нелинейным ростом при наличии дефицита товара. При этом увеличение $\tilde{n}$ ускоряет насыщение спроса.

Рассмотрим более сложный случай, чем представленный на рисунке 1. Предположим, что количество товара n_j , удовлетворяющее потребности j -го потребителя, имеет биномиальный закон распределения:

$$p_n(m) = C_M^m (\tilde{n}/M)^m (1 - \tilde{n}/M)^{M-m}, \quad m = 0, 1, K, M; \quad (22)$$

$$p_\sigma(j, l) = C_{j \cdot M}^l (\tilde{n}/M)^l (1 - \tilde{n}/M)^{j \cdot M - l}, \quad l = 0, 1, K, j \cdot M, \quad j = 0, 1, K, N_c, \quad (23)$$

где $\tilde{n}$ – среднее по ансамблю потребителей значение n_j ; M – наибольшее наблюдаемое значение n_j для данного рынка; $\tilde{n}/M$ – вероятность приобретения произвольным потребителем одной единицы товара. Коэффициенты Бернштейна (10) в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_j = j \times \tilde{n} \times H(j \leq N_g/M) + H(j > N_g/M) \times (j \cdot \tilde{n} \cdot I_{1-\tilde{n}/M}(j \cdot M - N_g, N_g) + \\ + N_g I_{\tilde{n}/M}(N_g + 1, j \cdot M - N_g)), \quad j = 0, 1, K, N_c. \end{aligned} \quad (24)$$

Из формул (22), (23) следует, что, во-первых, ни один потребитель не покупает больше M единиц товара, т.е. спрос на товар является ограниченным. Во-вторых, существует отличная от нуля вероятность того, что потребитель не купит ни одной единицы товара. Последнее обстоятельство сильно отличает потребителей, для которых справедливы законы распределения (22), (23), от потребителей, характеризующихся вырожденным законом распределения (18).

В качестве закона распределения моментов времени покупок $t_j^{(c)}$ будем использовать распределение Вейбулла:

$$\varphi_c(t) = H(t \geq 0) \alpha \cdot t^{\alpha-1} e^{-(t/T)^\alpha} / T^\alpha, \quad F_c(t) = H(t \geq 0) \left(1 - e^{-(t/T)^\alpha}\right). \quad (25)$$

Оно имеет простую экономическую интерпретацию. Разным значениям параметра формы α соответствуют различные виды покупательской активности потребителей на рынке. При $0 < \alpha < 1$

плотность распределения Вейбулла (25) сконцентрирована вблизи $t = 0$. Причём эта концентрация тем сильнее, чем ближе α к нулю. В этом случае периодом наибольшей активности потребителей на рынке являются первые моменты времени после начала продаж товара. Покупатели знают о поступлении товара на рынок, заинтересованы в приобретении товара и стараются купить его как можно быстрее. В пределе $\alpha \rightarrow +0$ спрос на товар становится ажиотажным при $t \approx 0$. При $\alpha > 1$ плотность распределения (25) концентрируется вблизи своей моды $t = T(1 - 1/\alpha)^{1/\alpha}$. Степень концентрации возрастает с ростом α . Это значит, что потребители либо не сразу узнают о поступлении товара на рынок, либо, зная о начале продаж товара, проявляют к нему интерес лишь спустя некоторое время. Во всех случаях с ростом времени они приобретают товар всё реже и реже. Спрос на товар становится ажиотажным при $t \approx T$, если $\alpha \rightarrow +\infty$. Наконец, при $\alpha = 1$ распределение Вейбулла (25) становится показательным распределением с параметром масштаба, равным T . Этот случай характеризуется наименьшей активностью потребителей на рынке среди всех возможных значений α : покупки товара начинаются сразу после поступления товара на рынок, но происходят не так интенсивно, как при $0 < \alpha < 1$. Товар хорошо знаком потребителям, но они не испытывают острой необходимости в его покупке. В течение всего времени продаж товара наблюдается лишь постепенное угасание интереса к нему потребителей. Следует ожидать, что среди всех значений α случай $\alpha = 1$ соответствует наибольшей длительности жизненного цикла товара.

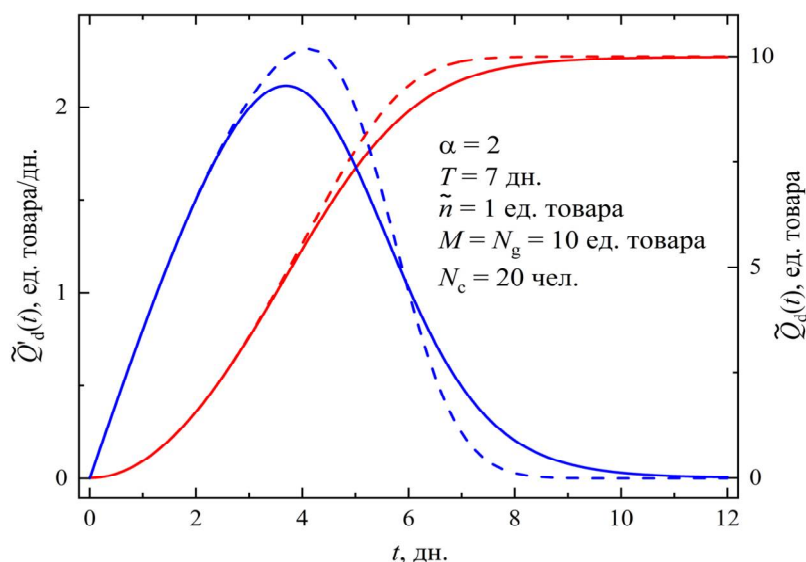


Рисунок 2 – Кривые спроса (красные линии, правая шкала) и жизненного цикла товара (синие линии, левая шкала). Сплошные линии найдены по формулам (9), (13), (22)–(25), причём n_j имеет биномиальное распределение. Пунктирные линии найдены по формулам (18), (20), (21), (25), причём n_j имеет вырожденное распределение

Рисунок 2 показывает, как меняются кривые спроса и жизненного цикла товара при переходе от неслучайной (18), (19) индивидуальной потребности в товаре к случайной (22)–(24). Как видим, этот переход увеличивает длительность жизненного цикла товара, уширяя зависимость от времени интенсивности спроса и затягивая выход на насыщение кривой спроса. Таким образом, если товар необходимо продать быстро и с наибольшей выгодой, то слишком большой разброс в значениях n_j у потребителей товара может помешать этим планам. В этом случае необходима определённая маркетинговая деятельность, направленная на выравнивание индивидуальных потребностей в товаре: нужно убедить потребителей с низким значением n_j покупать больше единиц товара. Это не только сузит закон распределения случайных величин n_j , но и увеличит среднюю индивидуальную потребность $\tilde{n}$ в товаре, что, как следует из рисунка 3а, уменьшит длительность жизненного цикла товара.

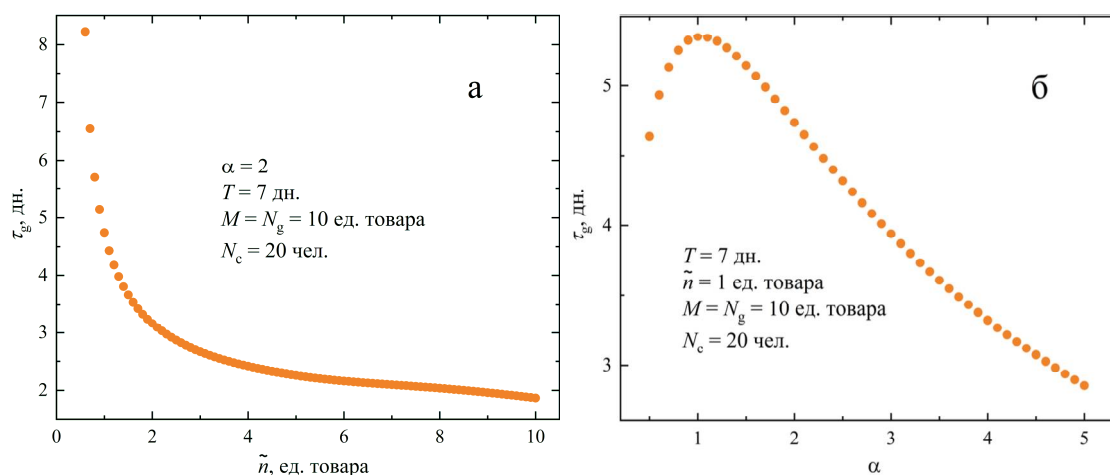


Рисунок 3 – Длительность жизненного цикла товара: а – в зависимости от среднего количества товара, приобретаемого одним потребителем; б – в зависимости от параметра α закона распределения (25) моментов времени покупательской активности потребителей. Длительность τ_g определялась как время, за которое спрос (9), (22)–(25) возрастает от 10 до 90 % своего максимального значения

Из рисунков 1 и 2 следует, что даже при наличии дефицита товара в первые моменты времени после начала продаж кривые спроса и жизненного цикла товара мало отличаются от графиков функций (16). Следовательно, в этом временном интервале интенсивность продаж определяется почти исключительно тем, каков закон распределения моментов времени $t_j^{(c)}$ потребительской активности на рынке. Поэтому для маркетинга изменение этого закона распределения – главный инструмент влияния на динамику интенсивности продаж. В подтверждение этих положений на рисунке 3б показано, как изменяется длительность жизненного цикла τ_g товара при изменении закона распределения моментов времени $t_j^{(c)}$. Хорошо видно, что в полном согласии со сделанным ранее предположением длительность τ_g максимальна при $\alpha = 1$, т.е. при минимальной потребительской активности на рынке.

Заключение. Предложенная в данной работе вероятностная модель спроса и жизненного цикла товара, концентрированным выражением которой являются формулы (9)–(16), (20), (21), устанавливает связь вероятностных характеристик поведения потребителей на рынке со стохастической динамикой интенсивности и объёмов продаж товара, количество которого на рынке ограничено. По словам Билла Гейтса, «знание – главный инструмент управления». По этой причине соотношения, подобные (9)–(16), (20), (21), имеют большое значение для маркетинга, так как дают знание механизмов влияния вероятностных характеристик рыночного поведения потребителей на динамику спроса. Если маркетолог располагает эмпирическими оценками законов распределения случайных величин $t_j^{(c)}$ и n_j , найденными в ходе стандартного статистического исследования конкретного рынка товара, то формулы (9)–(16), (20), (21) позволят ему эффективно управлять потребительским поведением, воздействуя на параметры этих законов распределения, с целью увеличения как спроса, так и интенсивности спроса на товар. Конечной целью такого эффективного управления является извлечение максимально возможной прибыли из продажи данного товара.

Отметим, что если случайной величине $t_j^{(c)}$ придать смысл момента времени, в который происходит увеличение численности некоторой популяции на величину $n_j^{(c)}$, то $Q_d(t)$ – это прирост численности популяции на промежутке времени $[0; t]$. При такой интерпретации формулы (9)–(12), (16) и (20) становятся вероятностными моделями, описывающими динамику среднего прироста численности популяции при условии, что прирост ограничен сверху величиной N_g , т.е. эти формулы определяют целый класс функций, подобных логистической функции, являющейся решением уравнения Ферхюльста. Таким образом, построенная в настоящей работе вероятностная модель пригодна для использования не только в экономической, но и в популяционной динамике.

Библиографический список

1. Варшавский Л. Е. Моделирование динамики экономических систем с неопределенными параметрами / Л. Е. Варшавский // Компьютерные исследования и моделирование. – 2018. – Т. 10, № 2. – С. 261–276. – DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-2-261-276.
2. Клебанова Т. С. Моделирование экономической динамики : учеб. пос. / Т. С. Клебанова, Н. А. Дубровина, О. Ю. Полякова, Е. В. Раевнева, А. В. Милов, Е. А. Сергиенко. – 2-е изд., стереотип. – Харьков : Издательский дом «ИНЖЭК», 2005. – 244 с.
3. Котлер Ф. Основы маркетинга / Ф. Котлер, Г. Армстронг. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1200 с.
4. Лабскер Л. Г. Вероятностное моделирование в финансово-экономической области / Л. Г. Лабскер. – Москва : Альпина Паблшер, 2002. – 224 с.
5. Михеев А. В. Вероятностный подход к математическому описанию рыночного равновесия / А. В. Михеев // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2018. – № 4. – С. 90–98. – DOI: 10.24143/2072-9502-2018-4-90-98.
6. Осипенко Г. С. Динамика спроса и предложения / Г. С. Осипенко, Е. К. Ершов // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2013. – № 3. – С. 235–247.
7. Caginalp C. Stochastic asset price dynamics and volatility using a symmetric supply and demand price equation / Carey Caginalp, Gunduz Caginalp // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2019. – Vol. 523. – P. 807–824. – DOI: 10.1016/j.physa.2019.02.049
8. Cyrus Chu C. Y. Population Dynamics: A New Economic Approach / C. Y. Cyrus Chu. – New York ; Oxford : Oxford University Press, 1998. – 240 p.
9. David H. A. Order Statistics / H. A. David, H. N. Nagaraja. – New York : John Wiley & Sons, 2003. – 458 p.
10. Lorentz G. G. Bernstein polynomials / G. G. Lorentz. – New York : Chelsea Publishing Company, 1986. – 134 p.
11. Shone R. Economic Dynamics: Phase Diagrams and their Economic Application / Ronald Shone. – Cambridge : Cambridge University Press, 2002. – 708 p.
12. Zhang W.-B. Discrete Dynamical Systems, Bifurcations, and Chaos in Economics / Wei-Bin Zhang. – Boston : Elsevier Science, 2006. – 460 p.

References

1. Varshavskiy L. E. Modelirovanie dinamiki ekonomicheskikh sistem s neopredelennymi parametrami [Uncertainty factor in modeling dynamics of economic systems]. *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie* [Computer Research and Modeling], 2018, vol. 10, no 2, pp. 261–276. DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-2-261-276.
2. Klebanova T. S., Dubrovina N. A., Polyakova O. Yu., Raevneva E. V., Milov A. V., Sergienko E. A. *Modelirovanie ekonomicheskoy dinamiki : uchebnoe posobie* [Modeling economic dynamics : tutorial]. 2nd ed., stereotype. Kharkov, Publishing House "INZHEK", 2005. 244 p.
3. Kotler P., Armstrong G. *Osnovy marketinga* [Principles of Marketing]. Moscow, "Vilyams" Publishing House, 2003. 1200 p.
4. Labsker L.G. *Veroyatnostnoe modelirovanie v finansovo-ekonomicheskoy oblasti* [Probabilistic modeling in the financial and economic fields]. Moscow, Alpina Publisher, 2002. 224 p.
5. Mikheev A. V. Veroyatnostnyy podkhod k matematicheskomu opisaniyu rynochnogo ravnovesiya [Probabilistic Approach to Mathematical Description of Market Equilibrium]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer science and Informatics], 2018, no 4, pp. 90–98. DOI: 10.24143/2072-9502-2018-4-90-98.
6. Osipenko G. S., Ershov E. K. Dinamika sprosa i predlozheniya [Demand and Supply Dynamics]. *Differentsialnye uravneniya i protsessy upravleniya* [Differential Equations and Control Processes], 2013, no 3, pp. 235–247.
7. Caginalp C., Caginalp G. Stochastic asset price dynamics and volatility using a symmetric supply and demand price equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2019, vol. 523, pp. 807–824. DOI: 10.1016/j.physa.2019.02.049.
8. Cyrus Chu C. Y. *Population Dynamics: A New Economic Approach*. New York ; Oxford, Oxford University Press, 1998. 240 p.
9. David H. A., Nagaraja H. N. *Order Statistics*. New York, John Wiley & Sons, 2003. 458 p.
10. Lorentz G.G. *Bernstein polynomials*. New York, Chelsea Publishing Company, 1986. 134 p.
11. Shone R. *Economic Dynamics: Phase Diagrams and their Economic Application*. Cambridge, Cambridge University Press, 2002. 708 p.
12. Zhang W.-B. *Discrete Dynamical Systems, Bifurcations, and Chaos in Economics*. Boston, Elsevier Science, 2006. 460 p.