

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК [004.94+519.6]:536.331

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА В КОЛЛОИДНОЙ ЖИДКОСТИ, ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ ИЗ ЯЧЕЙКИ ПОД МАСКОЙ ПРИ ИК-НАГРЕВЕ¹

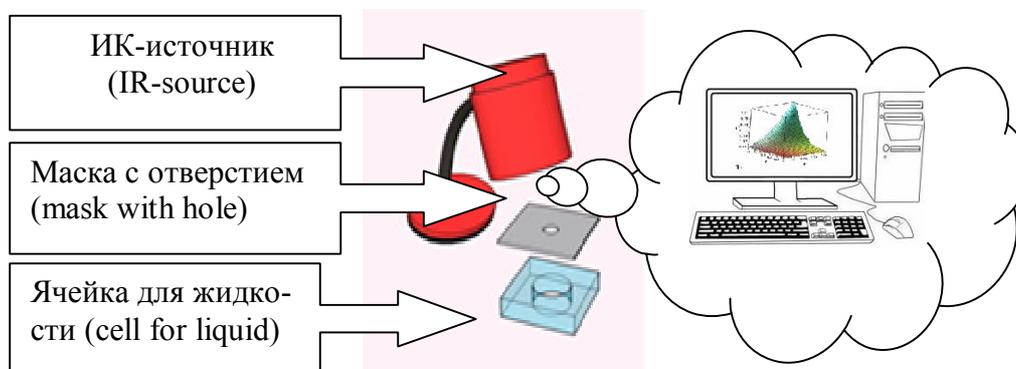
Статья поступила в редакцию 17.09.2016, в окончательном варианте – 27.10.2016.

Колегов Константин Сергеевич, старший преподаватель, Каспийский институт морского и речного транспорта филиал Волжского государственного университета водного транспорта, 414000, Российская Федерация, г. Астрахань, ул. Никольская, 6/14, младший научный сотрудник, Астраханский государственный университет, 414056, Российская Федерация, г. Астрахань, ул. Татищева, 20а, e-mail: k_k_s_87@mail.ru

В работе теоретически исследуется модификация метода испарительной литографии, когда в систему добавлен ИК-излучатель. Полимерные покрытия с периодической структурой, повторяющей шаблон с точностью до миллиметрового размера, формируются поперечными потоками в жидких растворах коллоидных частиц. Течение возникает из-за неравномерного испарения с поверхности жидкой пленки в результате ИК-нагрева через теневую маску. Разрабатывается математическая модель, которая описывает динамику коллоидной жидкости, эволюцию массовой доли латексных частиц в водном растворе, перенос тепла в жидком слое и твердом основании. Результаты численных расчетов предсказывают, что перепад температуры в коллоидной пленке может составлять несколько градусов. Динамика температуры жидкости значительно зависит от теплоотдачи подложки при малых значениях числа Гретца. Показано, что ИК-излучение, проходящее через отверстие в маске, нагревает не только тонкий жидкий слой, но и твердое основание под ним.

Ключевые слова: теплоперенос, массоперенос, коллоидная жидкость, испарительная литография, инфракрасное излучение, математическое моделирование, нагрев подложки, микро- и наночастицы, латекс, вода

Графическая аннотация (Graphical annotation)



MATHEMATICAL MODELLING OF HEAT AND MASS TRANSFER IN COLLOIDAL LIQUID EVAPORATING FROM THE CELL UNDER A MASK AND IR RADIATIVE HEATING

The article has been received by editorial board 17.09.2016, in the final version – 27.10.2016.

Kolegov Konstantin S., Senior Lecturer, Caspian Institute of Sea & River Transport the branch of the Volga State University of Water Transport, 6/14 Nikolskaya St., Astrakhan, 414000, Russian Federation, Junior Researcher, Astrakhan State University, 20a Tatishchev St., Astrakhan, 414056, Russian Federation, e-mail: k_k_s_87@mail.ru

This work is devoted to a theoretical studying of IR radiation-assisted evaporative lithography. Polymer coatings with periodic topographic patterns, repeating over millimeter length scales, are created from lateral flows in an aqueous dispersion of colloidal particles. The flow is driven by differences in evaporation rate across the wet film surface created

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-38-00439 мол_а).

by IR radiative heating through a shadow mask. The author constructs mathematical model, which describes dynamics of colloidal liquid, evolution of a mass fraction of latex particles in water solution, transfer of heat in a liquid layer and the substrate. The results of numerical calculations predict a temperature gradient in a colloidal film, which reaches several degrees. Dynamics of temperature in liquid considerably depends on a heat release by substrate at small values of Graetz number. IR radiation passes through the hole in the mask and heats a thin liquid layer and the substrate under it.

Keywords: heat transfer, mass transfer, colloidal liquid, evaporative lithography, infrared radiation, mathematical modelling, heating of a substrate, micro- and nanoparticles, latex, water

Испаряющаяся с твердой непромокаемой поверхности коллоидная пленка является открытой системой с переменной массой. Такая система обменивается с окружающей средой веществом и энергией. В жидком слое протекают процессы самоорганизации, которые вызывают фундаментальный интерес у исследователей из различных стран. Целью данной работы является математическое описание процессов тепло- и массопереноса на начальной стадии при испарении жидкости из коллоидного раствора под маской при воздействии ИК-излучения.

Общая характеристика проблематики работы. Целесообразность учета испарения как ключевого эффекта в регулировании процесса структурообразования при дегидратации капель коллоидных, истинных и некоторых других растворов была показана еще в пионерской работе [11]. Авторы [11] теоретически объясняют причины образования «кофейных колец», а также приводят результаты ряда натуральных экспериментов, показывающих возможность перехода от кольцевых структур к равномерному осаждению за счет изменения характера испарения. Это крайне важно, к примеру, в технологии струйной печати [35], в задачах структурирования поверхности [34], при тестировании лекарственных препаратов [29] и в других приложениях.

На данный момент уже реализована технология, которая позволяет за счет управления испарением получать требуемые структуры после высыхания капель или пленок на непроницаемой поверхности. В [18] было предложено название данной технологии – «испарительная литография». Суть метода (технологии) заключается в создании таких условий, при которых с поверхности жидкости происходит неравномерное испарение. Это приводит к возникновению компенсационных течений внутри капли. При этом поток жидкости перемещает взвешенные частицы в область интенсивного испарения. После полного высыхания на поверхности остается лишь твердая пленка определенного рельефа, состоящая из микро- или наночастиц.

Для того чтобы испарение с поверхности капли происходило неравномерно, в [18] используется маска в виде тонкой квадратной металлической пластины с массивом отверстий, расположенных на гексагональной сетке. Авторы [18] располагали маску (шаблон) непосредственно над поверхностью слоя жидкости. В результате были получены паттерны заданной шаблоном формы из коллоидных частиц для случаев различной концентрации раствора [18]. Влияние термокапиллярной конвекции на формирование структур методом испарительной литографии было изучено экспериментально в [19]. При этом было обнаружено течение Марангони, возникающее в результате изменения значения коэффициента поверхностного натяжения из-за охлаждения поверхности жидкости при испарении в районах открытых участков. Авторы [19] наблюдали прекращение рециркуляции при достижении долей полимера значений примерно в 22 % от объема. Бинарные растворы, высыхающие под маской, изучались в [20].

В [25] описан эксперимент, в котором над пленкой размещался тонкий металлический стержень, в районе расположения которого наблюдалось углубление. На краях впадины имелись возвышения в виде насыпи частиц [25].

Подход [18] был модифицирован в [15, 16] путем добавления в систему нагрева внешним источником (над маской размещалась ИК-лампа). Таким образом, локальные области жидкой коллоидной пленки в местах под отверстиями нагревались ИК-излучением. Это позволяло увеличить скорость испарения. Частицы полимера нагревались за счет поглощения ИК-излучения, что способствовало их слиянию и формированию твердой «стеклянной» пленки. В [33] испарительная литография в сочетании с ИК-излучением была применена для получения двухмерного фотонного кристалла из наночастиц золота.

Существуют современные полезные приложения, основанные на нанесении рельефных покрытий определенной шаблоном формы. К примеру, борьба с загрязнением погруженных в воду поверхностей морскими микроорганизмами, заключающаяся в использовании некоторых покрытий иерархической структуры [12]. Это крайне важно, в том числе и для прикаспийских регионов.

На данный момент механизмы процессов, рассматриваемых в данном разделе, изучены недостаточно. Методы математического моделирования в перспективе могут способствовать детальному изучению таких процессов. Это позволит улучшить уже существующие технологии структурирования поверхностей и разработать новые подходы. В настоящее время существует несколько математических моделей, описывающих некоторые процессы, протекающие при испарении жидкости под маской. Авторы [9] используют уравнение движения, уравнение неразрывности и уравнение конвекции–диффузии для описания динамики жидкости и эволюции массовой доли частиц в жидкой фазе под маской. В [9] предложено

В рассматриваемом диапазоне температур при нормальном атмосферном давлении вскипание жидкости не происходит. Из этого следует, что поверхностная неустойчивость в виде пузырей и «взрывов» исключена (испарение перегретых капель, к примеру, рассматривается в [28]). Отметим также, что здесь не идет речь об испарении под воздействием луча лазера. Поэтому описание испарения воды из-за разрушения водородных связей в поле лазерного излучения излишне [8]. В рассматриваемом случае жидкость высыхает за счет ее нагрева ИК-источником.

Вклад конвективных потоков, вызванных перепадом температуры в объеме и на поверхности, оценим с помощью критериев подобия. В данном случае число Рэлея

$$Ra_T = g|\beta_T|\Delta T l_c^3 / (\kappa\mu) \approx 10 \times 2 \times 10^{-4} \times 18 \times (10^{-3})^3 / (1.4 \times 10^{-7} \times 10^{-6}) \approx 2.6 \times 10^2.$$

Здесь g – ускорение свободного падения, β_T – коэффициент объемного температурного расширения, перепад температуры $\Delta T = T_g - T_0$, первоначальная температура жидкости $T_0 = 20$ °С, l_c – характерная длина, $\kappa = k_0/(c\rho)$ – температуропроводность, k_0 – коэффициент теплопроводности при температуре T_0 , c – удельная теплоемкость, $\mu = \eta/\rho$ – кинематическая вязкость. При повышении температуры воды от T_0 до T_g значение c уменьшается менее чем на 0.1 %. Поэтому здесь удельная теплоемкость – константа (значения некоторых физических свойств берутся для чистого растворителя из-за малой концентрации частиц). За характерную длину выбран радиус ячейки, $l_c = R \approx 1$ мм (в [15] этой длине соответствует половина расстояния между центрами соседних отверстий в маске). Число Марангони

$$Ma_T = |\sigma'_T| \Delta T l_c / (\kappa\eta) = 0.2 \times 10^{-3} \times 18 \times 10^{-3} / (1.4 \times 10^{-7} \times 10^{-3}) \approx 2.6 \times 10^4,$$

где $\sigma'_T = d\sigma/dT$, σ – коэффициент поверхностного натяжения. Физические параметры жидкости β_T , κ , ρ и μ при температуре T_0 взяты из [1]. В рассматриваемой системе параметр Ma_T на два порядка больше Ra_T .

Теперь определим влияние конвективных течений, вызванных градиентом концентрации частиц на поверхности и в объеме жидкости соответственно,

$$Ma_C = |\sigma'_C| \Delta C l_c / (D_0\eta) \approx 14.2 \times 0.15 \times 10^{-3} / (10^{-12} \times 10^{-3}) \approx 2 \times 10^{12},$$

$$Ra_C = g|\beta_C| \Delta C l_c^3 / (D_0\mu) \approx 10 \times 3 \times 10^{-2} \times 0.15 \times 10^{-9} / (10^{-12} \times 10^{-6}) \approx 5 \times 10^7,$$

где $\Delta C = C_{max} - C_0$, начальная массовая доля примеси $C_0 = 0.1$, максимальная доля частиц $C_{max} = 0.25$. Коэффициент диффузии D_0 определяется формулой Эйнштейна, $D_0 = k_B T / (6\pi\eta a)$, k_B – постоянная Больцмана. Коэффициент объемного концентрационного расширения β_C и $\sigma'_C = d\sigma/dC$ рассчитаны на основе экспериментальных данных [10, 14]. Значение концентрационного числа Марангони Ma_C на несколько порядков превышает значение числа Рэлея (Ra_C). Степень влияния силы тяжести на данную систему определим, проанализировав критерий Бонда,

$$Bo \approx g l_c^2 \rho / \sigma_0 \approx 10 \times (10^{-3})^2 \times 10^3 / (73 \times 10^{-3}) \approx 0.1 \ll 1,$$

где σ_0 – коэффициент поверхностного натяжения воды при комнатной температуре. Согласно полученному значению числа Бонда капиллярные силы доминируют над гравитационными, поэтому силой тяжести пренебрегаем [2]. Выполнив оценку значений чисел Марангони, Бонда и Рэлея, приходим к выводу, что в исследуемой системе потоки, вызванные поверхностными силами, доминируют над гравитационными течениями.

В рассмотрении берем тонкий слой жидкости, когда отношение начальной толщины пленки к радиусу ячейки мало, $\varepsilon = h_0/R \ll 1$. Возьмем значение аспектного соотношения $\varepsilon = 0.1$, то есть начальная толщина $h_0 = 0.1$ мм. По этой причине при описании модели ограничимся осредненными по толщине жидкого слоя величинами: скоростью радиального течения, массовой долей частиц, температурой и т.д. В очень тонких пленках вандерваальсовы силы могут быть значительными. Проанализируем влияние расклинивающего давления. Сравним гидростатическое давление $\rho g h_0 \approx 1$ Па и $\Pi = A/h_0^3 \approx 10^{-5}$ Па, где A – константа Гамакера, $A = 10^{-17}$ Дж [22]. Расклинивающее давление $\Pi \ll \rho g h_0$, поэтому силами взаимодействия пленки с подложкой пренебрегаем, в том числе и адсорбцией частиц на твердой поверхности (случай, когда десорбция происходит быстрее из-за сноса частиц с поверхности течением жидкости).

Считаем окружающий воздух сухим, то есть концентрацию водяного пара в нем малой. Поэтому пренебрегаем нагревом воздуха в результате прохождения через него коротковолнового ИК-излучения (одно- и двухатомарные газы практически прозрачны для тепловых лучей). Если поверхность маски светоотражающая, то ее температуру допустимо считать постоянной. Таким образом, нагревом воздуха в результате теплоотдачи от шаблона тоже пренебрегаем. Полагаем, что движение воздушных масс отсутствует. Тогда охлаждение поверхности жидкости в процессе конвекции воздуха не берем во внимание. Так как объем газовой среды многократно превышает объем жидкости, то нагревом воздуха в процессе испарения жидкости и ее теплоотдачи пренебрегаем. Кроме того, полагаем, что масса пластины

с ячейкой много больше массы жидкости. Принимая во внимание вышесказанное, считаем температуру воздуха, пластины с ячейкой и маски постоянной величиной T_0 . То есть эволюцию температуры будем рассматривать в жидком слое и в твердом основании. Перенос тепла между подложкой и каплей играет важную роль. Высокая теплопроводность подложки исключает, в частности, возможность обращения направления конвекции Марангони в капле, которое имеет место для подложек с относительно малой теплопроводностью [27]. Пренебрегаем теплопередачей между газовой средой и водой, а также излучением нагретой жидкости в окружающую среду. Плотность теплового потока от жидкости к воздуху равна $K(T - T_0)$, где коэффициент теплопередачи $K = (1/\alpha_{liq} + 1/\alpha_{air})^{-1}$, α_{liq} и α_{air} – коэффициенты теплоотдачи жидкости и воздуха соответственно. Учитывая, что значение коэффициента α_{liq} примерно на три порядка больше чем α_{air} , получим $K \approx \alpha_{air}$, $\alpha_{air} = 5.6 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$. Нагретая свободная поверхность жидкости излучает с интенсивностью $\sigma_{SB}(T^4 - T_0^4)$, где σ_{SB} – постоянная Стефана – Больцмана. Охлаждение поверхности за счет испарения выражается как LJ , где J – плотность потока пара, L – удельная теплота парообразования воды. Подстановка численных значений физических параметров в приведенные формулы показывает, что охлаждение жидкости в результате испарения на порядки выше влияния других двух эффектов. Также не берем во внимание светопропускание подложки и светоотражение поверхности золя.

Диссипативный разогрев жидкости не учитываем по причине того, что нагрев в результате вязкого трения в такой системе пренебрежительно мал по сравнению с передачей тепла из внешнего источника. Скорость диссипативного нагрева можно примерно оценить как $2(\partial u^* / \partial r^*)^2 \eta v_c^2 / (\rho c l_c^2)$. В этом случае получаем величину порядка $10^{-10} (\partial u^* / \partial r^*)^2 \text{ К/с}$. Здесь характерная скорость $v_c = \eta / (\rho l_c) \approx 1 \text{ мм/с}$, u^* – усредненная по высоте жидкого слоя скорость радиального течения (знак * обозначает безразмерную величину).

Вывод уравнения теплопроводности. Область рассмотрения задачи представлена на рис. 1b. Выбрана цилиндрическая система координат. По оси r начало отсчета взято в точке под центром отверстия в маске, а по оси z отсчет ведется от подложки. Ось r совпадает с горизонтальным основанием и перпендикулярна направлению вектора силы тяжести. Ось z направлена в противоположную сторону по отношению к вектору силы тяжести. Таким образом, задачу рассмотрим в области $\Omega_{fluid} = \{0 < r < R, 0 < z < h, t \geq 0\}$. Граница между жидкостью и воздухом $z = h(r, t)$ является подвижной.

Рассмотрим баланс тепловой энергии в выделенном элементарном объеме Ω (рис. 1b). Изменение тепловой энергии в этом объеме за время Δt

$$2\pi \delta r (h(r, t + \Delta t)T(r, t + \Delta t) - h(r, t)T(r, t))\rho c, \tag{1}$$

где T – усредненная по толщине жидкого слоя абсолютная температура, δr – расстояние между правой и левой границами области Ω . Изменение тепловой энергии (1) равняется переносу тепла течением:

$$-2\pi((r + \delta r)u(r + \delta r)h(r + \delta r)T(r + \delta r) - rh(r, t)u(r, t)T(r, t))\Delta t \rho c. \tag{2}$$

Некоторое количество энергии уходит через свободную поверхность в воздух в результате парообразования, часть энергии приходит от подложки (или уходит в нее) и еще происходит нагрев ИК-излучением жидкой поверхности (часть энергии излучения уходит на нагрев подложки),

$$2\pi r l(r, t) \delta r \Delta t (\alpha(T_s - T) + (q - q \exp(-a_\lambda h(r, t)))H(R_h - r) - LJ(r, t)), \tag{3}$$

где q – плотность мощности излучения, H – функция Хевисайда, R_h – радиус отверстия в маске, $T_s = T_s(r, t)$ – температура подложки, a_λ – показатель поглощения жидкости, α – коэффициент конвективно-теплообмена, $l = (1 + (\partial h / \partial r)^2)^{1/2}$. Здесь в (3) добавлена H , так как нагрев золя излучением происходит лишь под отверстием в шаблоне. Функцию Хевисайда аппроксимируем с помощью непрерывной функции:

$$H(r) = 1 / (1 + \exp(-2\Delta_{gap} r)),$$

где параметр Δ_{gap} регулирует толщину зазора между жидкостью и маской. Если $\Delta_{gap} \rightarrow 0$, то маска находится крайне высоко и не влияет на распределение нагрева по поверхности. В случае, когда $\Delta_{gap} \rightarrow \infty$, толщина зазора стремится к нулю, что в пределе приводит к полному блокированию внешнего нагрева маской за исключением области под отверстием. Необходимо также учесть диффузионный перенос тепла через левую и правую границы Ω ,

$$-2\pi r h(r, t) k(r, t) \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \Delta t + 2\pi (r + \delta r, t) h(r + \delta r, t) k(r + \delta r, t) \frac{\partial T(r + \delta r, t)}{\partial r} \Delta t. \tag{4}$$

Зависимость коэффициента теплопроводности воды в диапазоне температур от T_0 до T_g линейна и хорошо описывается аппроксимацией $k(T) = k_0[1 + b(T - T_0)]$. Для воды константа $b \approx 0.003 \text{ К}^{-1}$.

Учитывая (1), (2), (3) и (4), а также направление нормали, получаем:

$$2\pi r \delta r \rho c (Th|_{r, t + \Delta t} - Th|_{r, t}) = -2\pi \rho c ((r + \delta r)huT|_{r + \delta r, t} - rhuT|_{r, t}) \Delta t + 2\pi r \delta r l \Delta t (\alpha(T_s - T)|_{r, t} + (\alpha(q - q \exp(-a_\lambda h(r, t)))H(R_h - r) - LJ|_{r, t}) + 2\pi \Delta t ((r + \delta r)k \frac{\partial T}{\partial r} h|_{r + \delta r, t} - rk \frac{\partial T}{\partial r} h|_{r, t}))$$

Умножаем это выражение на $(2\pi r \delta r \Delta t \rho c)^{-1}$. Переходим к пределу при $\delta r \rightarrow 0$ и $\Delta t \rightarrow 0$. Тогда получаем:

$$\frac{\partial(hT)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ruhT)}{\partial r} = \frac{1}{rc\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(krh \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\alpha(T_s - T)l}{\rho c} + \frac{q(1 - \exp(-a_\lambda h))l}{\rho c} H(R_h - r) - \frac{Jl}{\rho c}.$$

Учитывая уравнение неразрывности жидкости [3]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rhu)}{\partial r} = -\frac{Jl}{\rho},$$

получаем окончательный вид уравнения теплопроводности для жидкого слоя:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{rc\rho h} \frac{\partial}{\partial r} \left(krh \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\alpha(T_s - T)l}{\rho ch} + \frac{q(1 - \exp(-a_\lambda h))l}{\rho ch} H(R_h - r) - \frac{Jl}{\rho h} \left(\frac{L}{c} + T \right).$$

Аналогично выводится уравнение для тонкого основания. Считая толщину подложки постоянной (в рассматриваемом диапазоне температур расширением твердого тела допустимо пренебречь) и равной начальной толщине жидкого слоя, получаем:

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{1}{rc\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) + \frac{\alpha(T - T_s)}{\rho ch_0} + \frac{q \exp(-a_\lambda h)}{\rho ch_0} H(R_h - r).$$

Однако значения физических параметров теперь берутся не для жидкости, а для непрозрачного кварцевого стекла. В данной работе рассматривается подложка лишь одного вида, но в эксперименте, описанном в [16], использовались и другие материалы: сталь, медь, алюминий и прочее. Коэффициент теплопроводности аппроксимируем линейной функцией $k(T) = 0.0045T + 0.07$ в рассматриваемом диапазоне температур. Плотность потока энергии ИК-излучения уменьшается при прохождении через слой жидкости. Поэтому q умножается на $\exp(-a_\lambda h)$, что следует из закона Бугера – Ламберта – Бера.

Уравнения математической модели. За основу возьмем изотермическую модель [5] и добавим в нее полученные уравнения теплопроводности для подложки и золя. Кроме того, учтем зависимость поверхностного натяжения σ и коэффициента диффузии D от температуры жидкости $T(r, t)$ и массовой доли частиц $C(r, t)$. Для перехода к безразмерному виду уравнений используем следующие масштабные соотношения: $r = r^* l_c$, $h = h^* l_c$, $R_h = R_h^* l_c$, $u = u^* v_c$, $T = T^* T_0$, $t = t^* t_c$, $J = J^* \rho v_c$, $k = k^* k_0$, $D = D^* D_0(T_0)$, $\sigma = \sigma^* \sigma_0$ и давление $P = P^* \rho v_c^2$. Значение D_0 определяется формулой Эйнштейна, $D_0(T_0) \approx 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}$. Здесь характерные длина $l_c = R$, скорость $v_c = \eta/(\rho l_c)$ и время $t_c = l_c/v_c$. Запишем систему уравнений модели: закон сохранения массы

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rhu)}{\partial r} = -Jl, \quad (5)$$

уравнение движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{u}{r^2} + \frac{r}{h} \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right), \quad (6)$$

уравнение конвекции–диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{1}{rh} \frac{\partial}{\partial r} \left(Drh \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{JCl}{h}, \quad (7)$$

уравнения теплопроводности для жидкости

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} = \text{Fo} \frac{1}{rh} \frac{\partial}{\partial r} \left(krh \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\text{Gz}} \frac{(T_s - T)l}{h} + \text{St} \frac{(1 - \exp(-a_\lambda h))l}{h} H(R_h - r) f(t) - \frac{Jl}{h} (\text{Bu} + 1) \quad (8)$$

и для твердого основания

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \text{Fo} \frac{1}{rh} \frac{\partial}{\partial r} \left(krh \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\text{Gz}} \frac{(T - T_s)l}{\varepsilon} + \text{St} \frac{\exp(-a_\lambda h)l}{\varepsilon} H(R_h - r) f(t). \quad (9)$$

Здесь и далее используются безразмерные величины, а знак «*» опущен для краткости. В (8) и (9) добавлена функция $f(t) = (0.5\pi)^{-1} \arctg(t/t_{\max} \Delta t_{\text{time}})$ для сглаживания точки разрыва в начальном моменте времени (после включения ИК-источника постоянная величина плотности потока энергии достигается не моментально, а постепенно через какой-то промежуток времени $\Delta t_{\text{time}} t_{\max}$). Параметр Δt_{time} регулирует плавность

перехода в точке разрыва, t_{max} – длительность процесса. В системе уравнений (5)–(9) присутствуют безразмерные параметры: число Фурье $Fo = \kappa t_0 / l_c^2$, число Бульгина $Bu = L / (cT_0)$, число Гретца $Gz = c\rho v_c / \alpha$, число Стэнтона $St = q / (c\rho v_c T_0)$, число Пекле $Pe = l_c v_c / D_0(T_0)$.

Выведем вид замыкающего соотношения, играющего роль уравнения состояния. Давление можно определить как давление Лапласа $\sigma(1/R_1 + 1/R_2)$. Здесь R_1 и R_2 – радиусы кривизны. В итоге уравнение состояния в безразмерном виде:

$$P = -\frac{\sigma}{Ca} \left(\frac{1}{l^3} \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{rl} \frac{\partial h}{\partial r} \right), \tag{10}$$

где капиллярное число $Ca = \eta^2 / (\rho \sigma_0 l_c)$ [4]. Коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры и массовой доли частиц, $\sigma(r, t) = \sigma_c - Ma(T - T_0)$, где $\sigma_c = (-14.2C + 43.84) / \sigma_0$. Модифицированное число Марангони $Ma = \sigma'_T T_0 / \sigma_0$ [21, 22]. Зависимость σ от C получена путем интерполяции экспериментальных данных [10] и справедлива для диапазона $0.1 \leq C \leq 0.25$ (рис. 2). При повышении концентрации коллоидного раствора коэффициент поверхностного натяжения уменьшается, впрочем, как и при повышении температуры.

С целью «замыкания» модельной системы уравнений для коэффициента диффузии используем эмпирическую формулу [22]:

$$D(r, t) = 1.184T(1 - C)^{6.55} / (C - 0.64)^2. \tag{11}$$

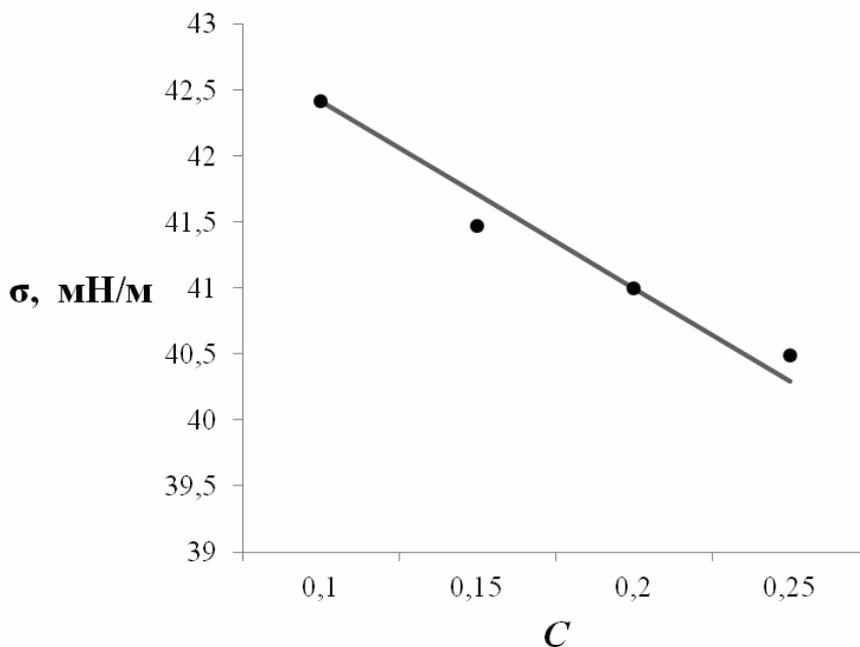


Рис. 2 – Зависимость коэффициента поверхностного натяжения от массовой доли частиц [10]

Начальные и граничные условия. Считаем, что в начальный момент времени жидкая поверхность плоская. У стенки ячейки возможны следующие варианты: трехфазная граница может быть закреплена [26]; выполняется условие постоянного краевого угла θ ; происходит периодическая, либо аperiodическая фиксация и открепление границы с последующим ее смещением [6]. Здесь рассмотрим условие постоянного краевого угла, когда $\theta = \pi/2$. В центральной части ячейки должно выполняться условие симметрии. Тогда для h получаем следующие условия:

$$h(r, 0) = \varepsilon, \quad \partial h(0, t) / \partial r = \partial h(R, t) / \partial r = 0. \tag{12}$$

Согласно экспериментальным данным по испарению этиленгликоля из нанолитровой ячейки [26] в начальный момент времени система находится в гидростатическом состоянии. Кроме того, на границах скорость также равна нулю [26]. Применим эти условия для нашей системы,

$$u(r, 0) = u(0, t) = u(R, t) = 0. \tag{13}$$

Отметим, что в [30] при расчете скорости течения в жидкости, испаряющейся из открытой цилиндрической ячейки, используются другие граничные условия для u .

Будем считать, что в момент времени $t = 0$ коллоидные частицы в растворе равномерно распределены по всему объему, а их начальная массовая доля равна C_0 . Принимая также во внимание осевую симметрию и отсутствие потока масс через стенку ячейки, приходим к следующим условиям:

$$C(r,0) = C_0, \quad \partial C(0,t)/\partial r = 0, \quad C(R,t)/R + \partial C(R,t)/\partial r = 0. \quad (14)$$

Из аналогичных соображений записываются условия и для температуры,

$$T(r,0) = T_0, \quad \partial T(0,t)/\partial r = 0, \quad \partial T(R,t)/\partial r = -\text{Bi}(T(R,t) - T_0). \quad (15)$$

Исключение составляет лишь последнее выражение в (15), которое описывает теплообмен с окружающей ячейку материалом. Число Био $\text{Bi} = l_c K/k$, где $K = 1/(\alpha_{liq}^{-1} + \alpha_{pl}^{-1})$, α_{pl} – коэффициент теплоотдачи пластины. Эти же условия используем для подложки,

$$T_s(r,0) = T_0, \quad \partial T_s(0,t)/\partial r = 0, \quad \partial T_s(R,t)/\partial r = -\text{Bi}(T_s(R,t) - T_0). \quad (16)$$

Последнее выражение в (16) является лишь грубым приближением условия на границе $r = R$. В действительности там происходит теплообмен между подложкой и жидкостью, подложкой и стенкой ячейки, а также распространение тепла в самом основании. Здесь берется случай, когда теплопередача от твердого основания к стенке ячейки является результирующей.

Модельный закон испарения. Плотность потока пара зависит от температуры, влажности, давления, потока воздуха, химического состава жидкости и других факторов. Также на скорость испарения под маской влияет ее удаленность от поверхности жидкого слоя. Здесь рассматривается частный случай, когда маска практически вплотную расположена над толщей воды. Определяющим фактором скорости парообразования в исследуемой системе является плотность потока энергии от излучателя. С экспериментальными данными по измерению скорости испарения в зависимости от q можно ознакомиться в [16]. В [13] для моделирования процесса испарения капли под колпаком с проделанным в центре него отверстием используется модельный закон

$$J(r,t) = (2/h(0,t)) \exp(-\Delta_{hole} r^2), \quad (17)$$

где параметр Δ_{hole} регулирует размер отверстия. В [13] рассматривается случай, когда скорость испарения нарастает с течением времени, поэтому в (17) стоит $h(0,t)$ в знаменателе. Измеренная скорость испарения E в [15, 16] является постоянной величиной, что установлено в процессе наблюдения за скоростью изменения массы водного раствора латекса. На гидродинамическом этапе высыхания масса жидкости уменьшается линейно. Поэтому для нашей системы модельный закон испарения (17) необходимо модифицировать,

$$J(r,t) = f(t) J_0 \exp(-\Delta_{hole} r^2), \quad (18)$$

где J_0 – плотность потока пара в центральной части ($r = 0$), $J_0 = \rho E$. В (18) добавлена функция $f(t)$ для согласования с начальным условием из (13). Скорость испарения в начале процесса достигает установившейся величины не моментально, а через какой-то малый промежуток времени $\Delta_{time} t_{max}$. Модельный закон (18) качественно согласуется с расчетами [18, 20].

Параметры задачи. Значения некоторых основных параметров, используемых в расчетах, представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Физические, геометрические и другие параметры

Наименование	Обозначение	Значение	Ед. измерения
Радиус ячейки	R	1	мм
Начальная высота пленки	h_0	0.1	мм
Аспектное отношение	$\varepsilon = h_0/R$	0.1	–
Радиус отверстия в маске	R_h	0.67	мм
Начальная массовая доля	C_0	0.1	–
Показатель поглощения	a_i	0.363*	см ⁻¹
Характерная температура	T_0	293	К
Характерная скорость	v_c	1	мм/с
Характерное время	t_c	1	с
Характерная длина	l_c	1	мм
Скорость испарения	E	4×10^{-7} (по [15])	м/с
–	Δ_{time}	0.01	–
Коеф. поверх. натяжения	σ_0	73×10^{-3}	Н/м
Динамическая вязкость	η	10^{-3}	Па·с
Плотность	ρ	10^3 (вода) 2.2×10^3 (стекло)	кг/м ³

Продолжение таблицы 1

–	Δ_{gap}	15	–
–	Δ_{hole}	6	–
Удельная теплоемкость	c	4.2×10^3 (вода) 1.05×10^3 (стекло)	Дж/кг/К
–	σ'_c	14.2	Н/м
Уд. теплота парообразования	L	2260	кДж/кг
Коеф. теплопроводности	k_0	0.6 (вода) 0.16 (стекло)	Вт/(м×К)
Число Пекле	Pe	10^6	–
Число Бульгина	Bu	1.8	–
Число Марангони	Ma	0.7	–
Число Фурье	Fo	0.14 (вода) 0.06 (стекло)	–
Капиллярное число	Ca	1.4×10^{-3}	–

Примечание: * – в таблице дано значение a_λ при температуре воды 25 °С для длины волны $\lambda = 1$ мкм [24].

Метод численного решения задачи. Из-за малой кривизны поверхности жидкости допустимо считать, что $l \approx 1$. Тогда система уравнений (5)–(9) упрощается. Замыкающее соотношение (10) принимает вид:

$$P = -\frac{\sigma}{Ca} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right). \quad (19)$$

Так же как и в [4], введем в систему две вспомогательные функции: градиент толщины слоя

$$\omega(r, t) = -Ca^{-1} \partial h / \partial r \quad (20)$$

и скорость сдвига

$$\dot{\gamma} = \partial u / \partial r. \quad (21)$$

Учитывая (19)–(21) уравнение движения (6) перепишем как

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sigma}{r} \frac{\partial(r\omega)}{\partial r} \right) - \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial r} = \left(\frac{Ca\omega r}{h} - 1 \right) \frac{u}{r^2} - \left(u - \frac{1}{r} + \frac{Ca\omega}{h} \right) \dot{\gamma}. \quad (22)$$

Граничное условие для скорости сдвига следует из линейного поведения u при $r \rightarrow 0$ [3],

$$\dot{\gamma}(0, t) = 0. \quad (23)$$

Система уравнений (5), (7)–(9), (20)–(22) с замыкающим соотношением (18) и условиями (12)–(16), (23) решается методом конечных разностей с использованием неявной схемы (первый порядок аппроксимации по времени и второй – по пространству). Производные по пространству аппроксимируются центральной разностной схемой. Нелинейная система алгебраических уравнений на верхнем временном слое решается методом Ньютона.

Автором была выполнена проверка сходимости метода решения в зависимости от шага сетки. Для расчетов была использована сетка с шагом по координате $\xi = 0.01$ и шагом по времени $\tau = 0.5$. Вычислительные эксперименты выполнялись в коммерческом пакете Maple 18.

Результаты расчетов и их обсуждение. В экспериментальной работе [15] не указано значение q . Но в [16] предложена оценочная формула, $q = P_L / (4\pi R_L^2)$, где P_L – мощность ИК-лампы, R_L – расстояние от поверхности жидкости до ИК-лампы. Эта оценка является грубой, ее результат до 40 % выше значений экспериментальных измерений [16]. Авторы [16] считают, что, возможно, не вся мощность лампы идет на излучение в ИК-диапазоне. В [15] лампа мощностью $P_L = 250$ Вт, излучающая в ближнем ИК-диапазоне ($\lambda \approx 0.78$ –1 мкм), была размещена над маской на расстоянии $R_L = 16.5$ см. Оценочная формула дает завышенное значение $q \approx 735$ Вт/м². Ниже в расчетах используем два примерных значения плотности мощности: $q = 450$ и $q = 600$ Вт/м², что соответствует значениям числа Стэнтона $St \approx 3.8 \times 10^{-4}$ и 5.1×10^{-4} для жидкости. Критерий подобия St для подложки в 1.7 раза больше. В этой работе используем значение числа Био (Bi) для жидкости такое же, как и для твердого основания. Это частный случай, в действительности значения могут быть различными.

Результаты численных расчетов представлены на рис. 3 и 4. При значении параметра $St > J_0$ ($J_0 = 4 \times 10^{-4}$) температура жидкости возрастает с 293 К до примерно 310 К в течении 210 с (рис. 3а), что качественно согласуется с экспериментальными данными [16]. Также видно, что максимальный градиент температуры по оси r составляет около 1.5 К. Для сравнения измеренная в [17] разность температур центральной части и периферии высыхающей капли воды (при нормальных комнатных условиях и без внешнего источника тепла) была меньше 0.3 К. При значении числа Гретца $Gz = 1$ динамика температуры подложки схожа с рисунком 3а. Поэтому она отдельно не приводится.

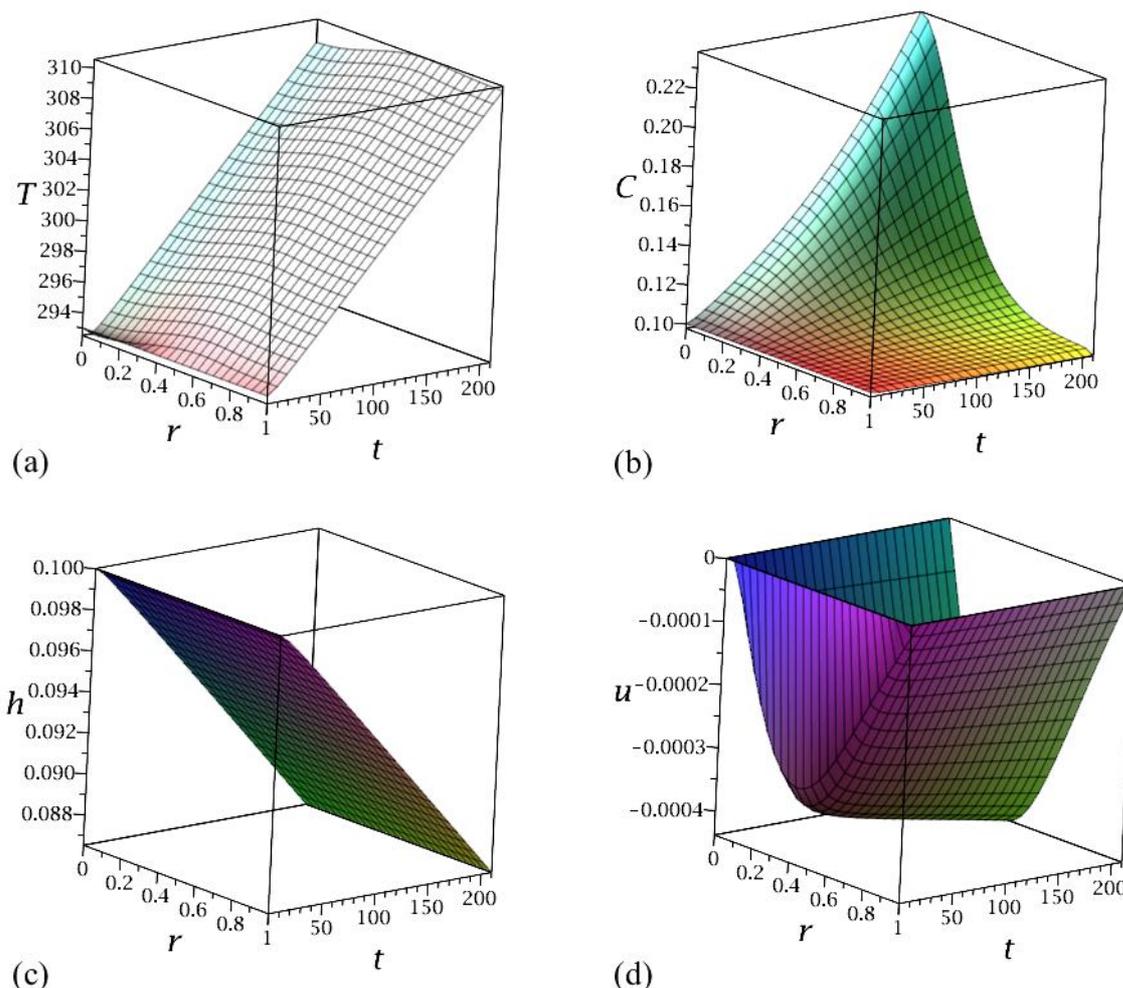


Рис. 3 – Результаты расчетов эволюции (а) температуры жидкости, (b) массовой доли частиц, (с) толщины пленки и (d) скорости радиального течения. Параметры расчета: $St = 5.1 \cdot 10^{-4}$, $Gz = 1$, $Bi = 10^{-2}$

В результате сноса частиц течением в центр ячейки их массовая доля вблизи оси симметрии за то же время (210 с) при заданной скорости испарения возрастает значительно, с 0.1 до 0.24 (рис. 3b). Около стенки ячейки значение C практически не меняется. Этот результат также находится в качественном согласии с экспериментальными наблюдениями [15]. Результаты, полученные при решении модельной системы уравнений без учета диффузии, не отличаются от тех, которые представлены на рис. 3b. Это подтверждает мнение авторов [15], что в такой системе перенос течением преобладает над диффузионным переносом из-за быстрого испарения и, как следствие, относительно высокой скорости течения. При дальнейшем нагреве коллоидной системы будет происходить коагуляция частиц. Поэтому коэффициент диффузии будет лишь уменьшаться из-за увеличения размера частиц, что следует из формулы Энштейна, $D_0 = k_p T / (6\pi\eta a)$.

В [16] было установлено, что масса коллоидного раствора с течением времени уменьшается линейно. Изменение массы пропорционально понижению высоты жидкого слоя. На рис. 3с наблюдаем линейное уменьшение толщины жидкой пленки. Отметим также, что при заданных краевых условиях двухфазная граница практически плоская на рассматриваемом временном интервале. При построении модели, описывающей фазовый переход «стекло–жидкость» необходимо учитывать кривизну поверхности в полной мере ($l > 1$), поскольку центральная часть пленки будет толще ее окраины [15]. Хотя ее влияние на систему не так очевидно по причине того, что далее по времени ожидается уменьшение скорости течения из-за увеличения вязкости коллоидного раствора [22] и понижения скорости испарения вследствие увеличения концентрации золя [23].

Максимальная скорость течения, равная примерно 0.4 мкм/с (рис. 3d), наблюдается в районе $r \approx 0.4R$, что в 1.3–4 раза дальше (в относительных величинах) от центра по сравнению со случаем испарения из ячейки без маски [4, 26, 30]. Примечательно, что график скорости, полученный при расчете модельных уравнений с σ , заданной константой, не отличается от рисунка 3d. То есть при рассмотренных

параметрах задачи компенсационное течение является доминирующим. К такому же выводу пришли и авторы [15]. По их мнению, течение Марангони должно быть направлено из открытой в закрытую масляной область жидкой пленки. В экспериментах наблюдается обратное – взвешенное вещество накапливается в открытых областях [15]. Поэтому авторы [15] утверждают, что течение Марангони не преобладает над компенсационным потоком, вызванным испарением. В [15] приводятся некоторые приближенные аналитические оценки, показывающие, что повышение вязкости золя в результате увеличения концентрации частиц должно замедлить течение Марангони. Такая зависимость экспериментально наблюдается и отражена в [19].

При значении параметра $St < J_0$ температура жидкости с течением времени понижается (рис. 4а), потому что нагрев внешним излучением не успевает компенсировать охлаждение в результате испарения. Из-за такого охлаждения на всех графиках температуры наблюдается ее минимум в районе максимальной скорости испарения (центр ячейки).

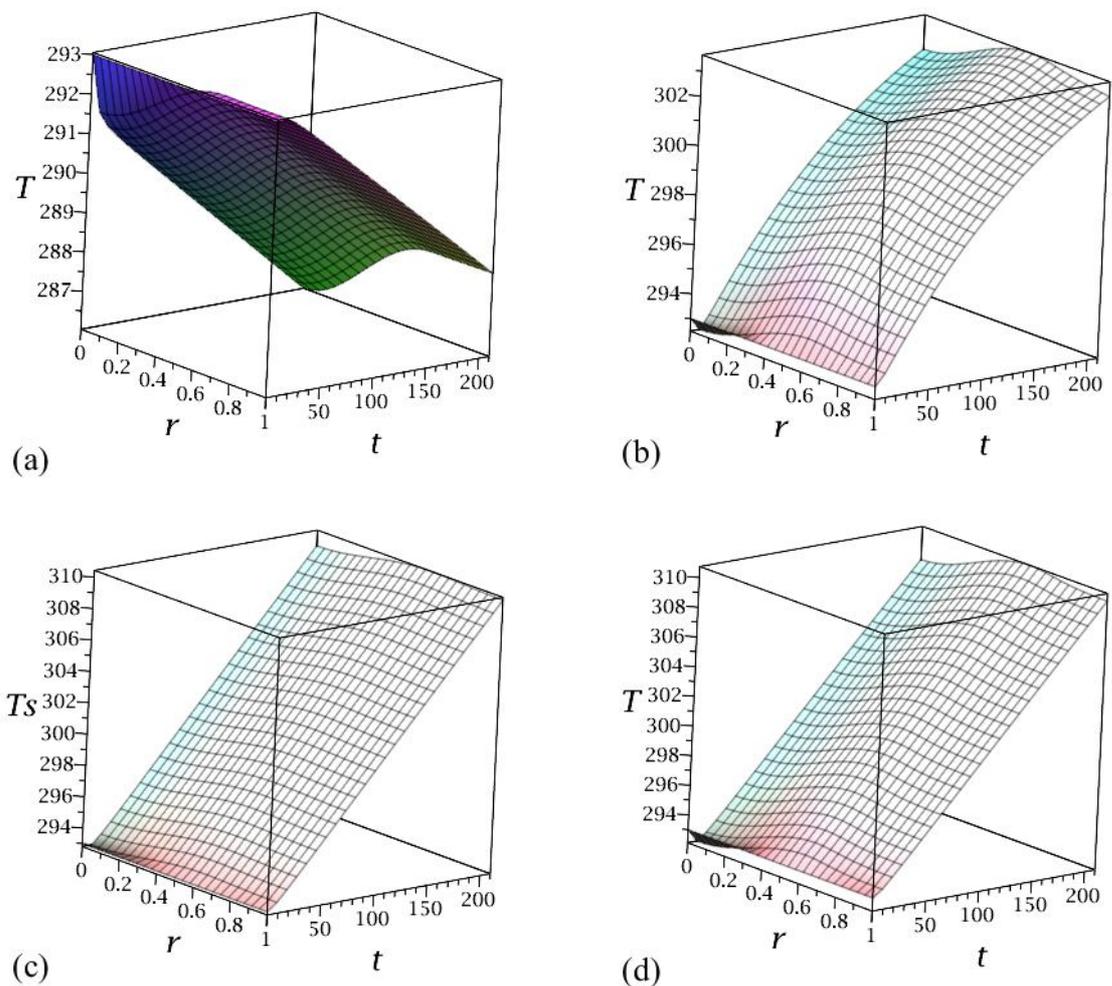


Рис. 4 – Результаты расчетов эволюции (а, b, d) температуры жидкости, (с) температуры подложки. Параметры расчета: $St = 3.8 \times 10^{-4}$ в (а) и 5.1×10^{-4} в (b)–(d), $Gz = 1$ в (а, b) и 10 в (с, d), $Bi = 10^{-2}$ в (а, с, d) и 10^{-1} в (b)

Теперь изучим влияние параметра Bi на систему. При увеличении значения числа Био на порядок скорость нагрева жидкости уменьшилась почти в два раза (рис. 4b). С ростом значения критерия подобия Bi теплоотдача от жидкости к стенке ячейки становится интенсивнее. Об этом свидетельствует относительно холодная периферия ($r \rightarrow R = 1$). Если $Bi = 0$, то это соответствует случаю, когда стенка ячейки изготовлена из теплоизолятора.

Число Гретца (Gz) также влияет на динамику температуры. При увеличенном на порядок значении Gz наблюдаем отличие эволюции температуры подложки и золя (рис. 4с, 4d). Градиент температуры жидкости по оси r возрос примерно до 2.5 К. У подложки градиент составляет около 1 К. Чем больше значение Gz , тем медленнее подложка отдает накопленное тепло жидкости. Случай, когда $Gz \rightarrow \infty$, соответствует условию термоизолированной границы «жидкость – основание».

Заклучение. В работе показано, что ИК-излучение, проходящее через отверстие в маске, нагревает не только жидкую пленку субмиллиметровой толщины, но и твердое основание под ней. Динамика температуры жидкости значительно зависит от теплоотдачи подложкой при малых значениях Gz . Установлено, что перепад температуры в коллоидной пленке может составлять несколько градусов. Модель предсказывает, что в системе может происходить как нагрев, так и охлаждение жидкости. Это зависит от соотношения параметров St и J_0 . При $St = J_0$ ожидается состояние термодинамического равновесия. Когда $St > J_0$ преобладает нагрев излучением, а при $St < J_0$ доминирует охлаждение в результате испарения. Накопление частиц в центральной части коллоидной пленки под отверстием в маске в результате их сноса компенсационным течением качественно согласуется с наблюдаемым в эксперименте формированием куполовидного возвышения на подложке [15].

Предложенная одномерная модель описывает процесс лишь на качественном уровне. Для количественного описания явления необходимо также учитывать вертикальный перенос тепла в подложке, поскольку ее толщина, как правило, превосходит высоту пленки h_0 . Влияние материала подложки на получаемую структуру лишь предстоит исследовать [15, 16]. Кроме того, необходимо рассматривать реологию в задаче, так как дальнейшее образование фазы стекла в значительной степени зависит от вязкости [15, 16]. До конца не ясно, справедливо ли приближение ньютоновской жидкости для описания процесса в концентрированном коллоидном растворе ($C > 0.25$) при таких малых скоростях, которые численно получены в данной работе (менее 1 мкм/с). Для того чтобы поставить точку в вопросе о влиянии течения Марангони на исследуемую систему, необходимо разработать двухмерную модель этого процесса.

Автор выражает благодарность проф., д.ф.-м.н. Ю. Ю. Тарасевичу за внимательное чтение рукописи и ценные критические замечания.

Список литературы

1. Барташевич М. В. Численное моделирование естественной конвекции в лежащей капле жидкости / М. В. Барташевич, И. В. Марчук, О. А. Кабов // Теплофизика и аэромеханика. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 171–182.
2. Колегов К. С. Математическое моделирование динамики жидкости в испаряющейся капле с учётом капиллярных и гравитационных сил / К. С. Колегов, А. И. Лобанов // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. – 2014. – № 2. – С. 375–380.
3. Колегов К. С. Сравнение квазистационарной и нестационарной математических моделей течений в испаряющейся капле / К. С. Колегов, А. И. Лобанов // Компьютерные исследования и моделирование. – 2012. – Т. 4, № 4. – С. 811–825.
4. Колегов К. С. Сравнение квазистационарной и нестационарной математических моделей течений в испаряющейся капле с учетом вязкости / К. С. Колегов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2014. – № 3. – С. 110–122.
5. Колегов К. С. Формирование кольцевых структур в высыхающей под шаблоном пленке коллоидного раствора / К. С. Колегов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 24–33.
6. Лебедев-Степанов П. В. Самоорганизация частиц в испаряющемся мениске коллоидного раствора / П. В. Лебедев-Степанов, С. П. Молчанов, Т. А. Карабут, С. А. Рыбак // Акустический журнал. – 2010. – Т. 56, № 5. – С. 613–615.
7. Матвеев В. Н. Вязкость и структура дисперсных систем / В. Н. Матвеев, Е. А. Кирсанов // Вестник Московского университета. Серия 2. Химия. – 2011. – Т. 52, № 4. – С. 243–276.
8. Тригуб В. И. Испарение капель воды миллиметрового диапазона размеров в поле излучения инфракрасного лазера / В. И. Тригуб // Журнал технической физики. – 2006. – Т. 76, № 4. – С. 120–123.
9. Arshad T. A. Templated evaporative lithography for high throughput fabrication of nanopatterned films / T. A. Arshad, R. T. Bonnecaze // Nanoscale. – 2013. – Vol. 5, issue 2. – P. 624–633.
10. Aupetit A. Determination of the surface tension of latex / A. Aupetit // Rubber Chemistry and Technology. – 1965. – Vol. 38, № 1. – P. 170–175.
11. Deegan R. D. Contact line deposits in an evaporating drop / R. D. Deegan, O. Bakajin, T. F. Dupont, G. Huber, S. R. Nagel, T. A. Witten // Physical Review E. – 2000. – Vol. 62, № 1. – P. 756–765.
12. Efimenko K. Development and testing of hierarchically wrinkled coatings for marine antifouling / K. Efimenko, J. Finlay, M. E. Callow, J. A. Callow, J. Genzer // ACS Applied Materials & Interfaces. – 2009. – Vol. 1, issue 5. – P. 1031–1040.
13. Fischer B. J. Particle convection in an evaporating colloidal droplet / B. J. Fischer // Langmuir. – 2002. – Vol. 18, № 1. – P. 60–67.
14. Franta I. Elastomers and Rubber Compounding Materials / I. Franta. – Amsterdam : Elsevier, 1989. – 608 p.
15. Georgiadis A. Bespoke periodic topography in hard polymer films by infrared radiation-assisted evaporative lithography / A. Georgiadis, A. F. Routh, M. W. Murray, J. L. Keddie // Soft Matter. – 2011. – Vol. 7, issue 23. – P. 11098–11102.
16. Georgiadis A. Aesthetically textured, hard latex coatings by fast IR-assisted evaporative lithography / A. Georgiadis, F. N. Muhamad, A. Utgenannt, J. L. Keddie // Progress in Organic Coatings. – 2013. – Vol. 76, issue 12. – P. 1786–1791.
17. Hamamoto Y. Order-of-magnitude increase in flow velocity driven by mass conservation during the evaporation of sessile drops / Y. Hamamoto, J. R. E. Christy, K. Sefiane // Physical Review E. – 2011. – Vol. 83. – P. 051602.

18. Harris D. J. Patterning colloidal films via evaporative lithography / D. J. Harris, H. Hu, J. C. Conrad, J. A. Lewis // *Physical Review Letters*. – 2007. – Vol. 98, № 14. – P. 148301.
19. Harris D. J. Marangoni effects on evaporative lithographic patterning of colloidal films / D. J. Harris, J. A. Lewis // *Langmuir*. – 2008. – Vol. 24, № 8. – P. 3681–3685.
20. Harris D. J. Evaporative lithographic patterning of binary colloidal films / D. J. Harris, J. C. Conrad, J. A. Lewis // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. – 2009. – Vol. 367, issue 1909. – P. 5157–5165.
21. Klentzman J. The effect of evaporation on fingering instabilities / J. Klentzman, V. S. Ajaev // *Physics of Fluids*. – 2009. – Vol. 21, issue 12. – P. 122101.
22. Maki K. L. Fast evaporation of spreading droplets of colloidal suspensions / K. L. Maki, S. Kumar // *Langmuir*. – 2011. – Vol. 27, issue 18. – P. 11347–11363.
23. Okuzono T. Effects of gelation on the evaporation rate of polymer solutions / T. Okuzono, N. Aoki, T. Kajiya, M. Doi // *Journal of the Physical Society of Japan*. – 2010. – Vol. 79, № 9. – P. 094801.
24. Oron A. Nonlinear dynamics of irradiated thin volatile liquid films / A. Oron // *Physics of Fluids*. – 2000. – Vol. 12. – P. 29–41.
25. Parneix C. Dips and rims in dried colloidal films / C. Parneix, P. Vandoolaege, V. S. Nikolayev, D. Quere, J. Li, B. Cabane // *Physical Review Letters*. – 2010. – Vol. 105, issue 26. – P. 266103.
26. Rieger B. Ring formation in nanoliter cups: Quantitative measurements of flow in micromachined wells / B. Rieger, van den L. R. Doel, van L. J. Vliet // *Physical Review E*. – 2003. – Vol. 68, № 3. – P. 036312.
27. Ristenpart W. D. Influence of substrate conductivity on circulation reversal in evaporating drops / W. D. Ristenpart, P. G. Kim, C. Domingues, J. Wan, H. A. Stone // *Physical Review Letters*. – 2007. – Vol. 99, issue 23. – P. 234502.
28. Shepherd J. E. Rapid evaporation at the superheat limit / J. E. Shepherd, B. Sturtevant // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1982. – Vol. 121. – P. 379–402.
29. Takhistov P. Complex stain morphologies / P. Takhistov, H. C. Chang // *Industrial & Engineering Chemistry Research*. – 2002. – Vol. 41, № 25. – P. 6256–6269.
30. Tarasevich Y. Y. Evaporation-induced flow inside circular wells: analytical results and simulations / Y. Y. Tarasevich, I. V. Vodolazskaya, O. P. Isakova, M. S. Abdel Latif // *Microgravity Science and Technology*. – 2009. – Vol. 21. – P. 39–44.
31. Tarasevich Yu. Yu. Mass transfer during drying of colloidal film beneath a patterned mask that contains a hexagonal array of holes / Yu. Yu. Tarasevich, I. V. Vodolazskaya // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2016. – Vol. 681. – P. 012033.
32. Tarasevich Yu. Yu. Mathematical modeling of pattern formation caused by drying of colloidal film under a mask / Yu. Yu. Tarasevich, I. V. Vodolazskaya, L. V. Sakharova // *European Physical Journal E*. – 2016. – Vol. 39, № 2. – P. 26.
33. Utgenannt A. Fast assembly of gold nanoparticles in large-area 2d nanogrids using a one-step, near-infrared radiation-assisted evaporation process / A. Utgenannt, R. Maspero, A. Fortini, R. Turner, M. Florescu, C. Jaynes, A. G. Kanaras, O. L. Muskens, R. P. Sear, J. L. Keddie // *ACS Nano*. – 2016. – Vol. 10, issue 2. – P. 2232–2242.
34. Xu J. Self-assembly of gradient concentric rings via solvent evaporation from a capillary bridge / J. Xu, J. Xia, S. W. Hong, Z. Lin, F. Qiu, Y. Yang // *Physical Review Letters*. – 2006. – Vol. 96, № 6. – P. 066104.
35. Yunker P. J. Suppression of the coffee-ring effect by shape-dependent capillary interactions / P. J. Yunker, T. Still, M. A. Lohr, A. G. Yodh // *Nature*. – 2011. – Vol. 476, № 7360. – P. 308–311.

References

1. Bartashevich M. V., Marchuk I. V., Kabov O. A. Chislennoe modelirovanie estestvennoy konvekcii v lezhashchey kaple zhidkosti [Numerical simulation of natural convection in a sessile liquid droplet]. *Teplofizika i aeromekhanika* [Thermophysics and Aeromechanics], 2012, vol. 19, no. 2, pp. 317–328.
2. Kolegov K. S., Lobanov A. I. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki zhidkosti v ispariyayushcheysya kaple s uchetom kapillyarnykh i gravitatsionnykh sil [Mathematical modeling of fluid dynamics in evaporating drop with taking into account capillary and gravitational forces]. *Vestnik RUDN. Seriya Matematika. Informatika. Fizika* [Bulletin of the PFUR. Ser. Mathematics. Informatics. Physics], 2014, no. 2, pp. 375–380.
3. Kolegov K. S., Lobanov A. I. Sravnenie kvazistatsionnoy i nestatsionnoy matematicheskikh modeley techeniy v ispariyayushcheysya kaple [Comparing of a quasi-steady and non-steady mathematical models of fluid flow in evaporating drop]. *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie* [Computer Research and Modeling], 2012, vol. 4, no. 4, pp. 811–825.
4. Kolegov K. S. Sravnenie kvazistatsionnoy i nestatsionnoy matematicheskikh modeley techeniy v ispariyayushcheysya kaple s uchetom vyazkosti [Comparison of quasisteady and nonsteady mathematical models of fluid flow in evaporating drop with due regard for the viscosity]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye nauki* [Bulletin of Udmurt University. Mathematics, Mechanics, Computer Science], 2014, no. 3, pp. 110–122.
5. Kolegov K. S. Formirovanie koltsevyykh struktur v vysykhayushchey pod shablonom plenke kolloidnogo rastvora [Formation of ring structures in a drying under the mask film of colloidal solution]. *Vestnik YUUrGU. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye»* [Bulletin of the SUSU. Ser. Mathematical Modelling and Programming], 2014, vol. 7, no. 1, pp. 24–33.
6. Lebedev-Stepanov P. V., Molchanov S. P., Karabut T. A., Rybak S. A. Samoorganizatsiya chastits v ispariyayushchemysya meniske kolloidnogo rastvora [Self-organization of particles in an evaporating meniscus of a colloidal solution]. *Akusticheskiy zhurnal* [Acoustical Physics], 2010, vol. 56, issue 5, pp. 651–653.

7. Matveyenko V. N., Kirsanov E. A. Vyazkost i struktura dispersnyh sistem [Viscosity and structure of disperse systems]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 2. Himiya* [Bulletin of the Moscow University. Ser. 2. Chemistry], 2011, vol. 52, no. 4, pp. 243–276.
8. Trigub V. I. Isparenie kapel vody millimetrovogo diapazona razmerov v pole izlucheniya infrakrasnogo lazera [Evaporation of millimeter water drops in the field of IR laser radiation]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Technical Physics], 2006, vol. 51, issue 4, pp. 510–513.
9. Arshad T. A., Bonnecaze R. T. Templated evaporative lithography for high throughput fabrication of nanopatterned films. *Nanoscale*, 2013, vol. 5, issue 2, pp. 624–633.
10. Aupetit A. Determination of the surface tension of latex. *Rubber Chemistry and Technology*, 1965, vol. 38, no. 1, pp. 170–175.
11. Deegan R. D., Bakajin O., Dupont T. F., Huber, Nagel S. R., Witten T. A. Contact line deposits in an evaporating drop. *Physical Review E*, 2000, vol. 62, no. 1, pp. 756–765.
12. Efimenko K., Finlay J., Callow M. E., Callow J. A. and Genzer J. Development and testing of hierarchically wrinkled coatings for marine antifouling. *ACS Applied Materials & Interfaces*, 2009, vol. 1, issue 5, p. 1031–1040.
13. Fischer B. J. Particle convection in an evaporating colloidal droplet. *Langmuir*, 2002, vol. 18, no. 1, pp. 60–67.
14. Franta I. Elastomers and Rubber Compounding Materials. Amsterdam, Elsevier, 1989. 608 p.
15. Georgiadis A., Routh A. F., Murray M. W., Keddie J. L. Bespoke periodic topography in hard polymer films by infrared radiation-assisted evaporative lithography. *Soft Matter*, 2011, vol. 7, issue 23, pp. 11098–11102.
16. Georgiadis A., Muhamad F. N., Utgenannt A., Keddie J. L. Aesthetically textured, hard latex coatings by fast IR-assisted evaporative lithography. *Progress in Organic Coatings*, 2013, vol. 76, issue 12, pp. 1786–1791.
17. Hamamoto Y., Christy J. R. E., Sefiane K. Order-of-magnitude increase in flow velocity driven by mass conservation during the evaporation of sessile drops. *Physical Review E*, 2011, vol. 83, p. 051602.
18. Harris D. J., Hu H., Conrad J. C., Lewis J. A. Patterning colloidal films via evaporative lithography. *Physical Review Letters*, 2007, vol. 98, no. 14, p. 148301.
19. Harris D. J., Lewis J. A. Marangoni effects on evaporative lithographic patterning of colloidal films. *Langmuir*, 2008, vol. 24, no. 8, pp. 3681–3685.
20. Harris D. J., Conrad J. C., Lewis J. A. Evaporative lithographic patterning of binary colloidal films. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2009, vol. 367, issue 1909, pp. 5157–5165.
21. Klentzman J., Ajaev V. S. The effect of evaporation on fingering instabilities. *Physics of Fluids*, 2009, vol. 21, issue 12, p. 122101.
22. Maki K. L., Kumar S. Fast evaporation of spreading droplets of colloidal suspensions. *Langmuir*, 2011, vol. 27, issue 18, pp. 11347–11363.
23. Okuzono T., Aoki N., Kajiya T., Doi M. Effects of gelation on the evaporation rate of polymer solutions. *Journal of the Physical Society of Japan*, 2010, vol. 79, no. 9, p. 094801.
24. Oron A. Nonlinear dynamics of irradiated thin volatile liquid films. *Physics of Fluids*, 2000, vol. 12, pp. 29–41.
25. Parneix C., Vandoolaeghe P., Nikolayev V. S., Quere D., Li J., Cabane B. Dips and rims in dried colloidal films. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, vol. 105, issue 26, p. 266103.
26. Rieger B., van den Doel L. R., van Vliet L. J. Ring formation in nanoliter cups: Quantitative measurements of flow in micromachined wells. *Physical Review E*, 2003, vol. 68, no. 3, p. 036312.
27. Ristenpart W. D., Kim P. G., Domingues C., Wan J., Stone H. A. Influence of substrate conductivity on circulation reversal in evaporating drops. *Physical Review Letters*, 2007, vol. 99, issue 23, p. 234502.
28. Shepherd J. E., Sturtevant B. Rapid evaporation at the superheat limit. *Journal of Fluid Mechanics*, 1982, vol. 121, pp. 379–402.
29. Takhistov P., Chang H. C. Complex stain morphologies. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2002, vol. 41, no. 25, pp. 6256–6269.
30. Tarasevich Y. Y., Vodolazskaya I. V., Isakova O. P., Abdel Latif M. S. Evaporation-induced flow inside circular wells: analytical results and simulations. *Microgravity Science and Technology*, 2009, vol. 21, pp. 39–44.
31. Tarasevich Yu. Yu., Vodolazskaya I. V. Mass transfer during drying of colloidal film beneath a patterned mask that contains a hexagonal array of holes. *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, vol. 681, pp. 012033.
32. Tarasevich Yu. Yu., Vodolazskaya I. V., Sakharova L. V. Mathematical modeling of pattern formation caused by drying of colloidal film under a mask. *European Physical Journal E*, 2016, vol. 39, no. 2, pp. 26.
33. Utgenannt A., Maspero R., Fortini A., Turner R., Florescu M., Jeynes C., Kanaras A. G., Muskens O. L., Sear R. P., Keddie J. L. Fast assembly of gold nanoparticles in large-area 2d nanogrids using a one-step, near-infrared radiation-assisted evaporation process. *ACS Nano*, 2016, vol. 10, issue 2, pp. 2232–2242.
34. Xu J., Xia J., Hong S. W., Lin Z., Qiu F., Yang Y. Self-assembly of gradient concentric rings via solvent evaporation from a capillary bridge. *Physical Review Letters*, 2006, vol. 96, no. 6, pp. 066104.
35. Yunker P. J., Still T., Lohr M. A., Yodh A. G. Suppression of the coffee-ring effect by shape-dependent capillary interactions. *Nature*, 2011, vol. 476, no. 7360, pp. 308–311.