СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.81

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА В СЕТИ

Афонасенков Евгений Владимирович, аспирант, Волгоградский государственный технический университет, 400005, Российская Федерация, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, e-mail: stepanenkoigor1988@yandex.ru

Степаненко Игорь Александрович, аспирант, Волгоградский государственный технический университет, 400005, Российская Федерация, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, e-mail: stepanenkoigor1988@yandex.ru

Данная статья посвящена задаче нахождения максимального потока в сети, т.е. определения оптимального маршрута движения пакетов данных с мест их первоначального расположения к конечному узлу через коммутационный центр. В задаче о максимальном потоке необходимо найти максимальную скорость пересылки продукта от источника к стоку, при которой не будут нарушаться ограничения пропускной способности. Это одна из задач, возникающих в транспортных сетях, и в данной статье приводится эффективный алгоритм ее решения. Более того, основные методы, используемые в рассматриваемом алгоритме решения задач о максимальном потоке, можно применять для решения других задач, связанных с транспортными сетями. В данной статье дается определение таким понятиям, как транспортная сеть, ориентированный граф, ребро графа, а также дается формальное определение задачи о максимальном потоке, приводится словесное описание алгоритма решения поставленной задачи, подробно рассматриваются основные шаги данного алгоритма. Приводится простой пример, иллюстрирующий работу алгоритма по нахождению максимального потока в сети, и в заключение делается вывод о достоинствах и недостатках данного алгоритма.

Ключевые слова: поток, алгоритм, сеть, максимальный поток, граф, задача, узел, источник, коммутационный узел, сток, неориентированная сеть, оптимальный маршрут, пропускная способность, информация

THE PROBLEM OF FINDING THE MAXIMUM NETWORK FLOW

Afonasenkov Yevgeniy V., post-graduate student, Volgograd State Technical University, 28 Lenin av., Volgograd, 400131, Russian Federation, E-mail: stepanenkoigor1988@yandex.ru

Stepanenko Igor A., post-graduate student, Volgograd State Technical University, 28 Lenin av., Volgograd, 400131, Russian Federation, e-mail: stepanenkoigor1988@yandex.ru

This article covers the problem of finding the maximum network flow, i.e. determining the optimal route of the data packets from their original sites to their destination node through a switching center. In so doing, the critique says it is necessary to find the maximum speed of delivery of the product from source to drain, within the capacity constraints. In the paper's view, this is one of the problems arising in transportation networks, and this document contains an efficient algorithm for resolving it. Moreover, the basic techniques used in this algorithm for solving the maximum flow could be applied to other related problems in the transport sector. In the course of the discussion, concepts such as transportation network, directed graph and edge of graph are defined, and a formal definition is given for the challenges related to maximum flow. Furthermore, the verbal description of the algorithm for resolving this problem is assessed in detail in the basic steps of the algorithm. In conclusion, this blueprint provides a simple example illustrating the algorithm for finding the maximum network flow, noting both the advantages and disadvantages of this procedure.

Keywords: flow, algorithm, network, maximum flow, graph, problem, node, source, switching node, runoff, undirected network, best route, capacity, information

Дадим определения ряду понятий.

1. Транспортная сеть – ориентированный граф, каждое ребро которого имеет неотрицательную пропускную способность.

2. Ориентированный граф – это упорядоченная пара G(V,A), где V – это непустое множество вершин или узлов, а A – это множество (упорядоченных) пар различных вершин, называемых дугами или ориентированными рёбрами.

3. Ребро графа – линия, соединяющая пару смежных вершин графа.

Нередко решаемая в области исследования сети задача может быть описана следующим образом: из исходного узла в конечный узел должно передаться некоторое количество данных. Существуют промежуточные узлы, предназначенные для передачи данных. Предполагается, что сеть имеет ограниченную пропускную способность. Требуется определить оптимальный маршрут движения пакетов данных с мест их первоначального расположения к конечному узлу. Аналогичную структуру имеет также следующая задача: для существующей коммуникационной сети требуется построить центральный пункт связи, через который проходила бы вся информация, необходимо получить максимально возможный поток информации.

В обоих этих примерах выбирается специальный узел, через который должен протекать весь поток из источника в сток, назовем его коммутационный узел. Обозначим через f_{ij}^1 поток из узла i в j, протекающий по направлению к коммутационному узлу, а через f_{ij}^2 – поток из i в j после прохождения коммутационного узла. Тогда рассматриваемая задача может быть сформулирована следующим образом: минимизировать v при условиях, показанных в выражении 1:

$$\begin{gathered}
\sum_i \left(f_{ij}^1 - f_{ji}^1\right) = \begin{cases} v^1, \text{если } i = s, \\ 0, \text{если } i \neq s, a, \\ -v^1, \text{если } i = a, \end{cases} \\
\Sigma_i \left(f_{ij}^2 - f_{ji}^2\right) = \begin{cases} v^2, \text{если } i = a, \\ 0, \text{если } i \neq a, t, \\ -v^2, \text{если } i = t, \end{cases} \\
\left|f_{ij}^1\right| + \left|f_{ij}^2\right| \le u_{ij} \text{ для всех } i, j, \\
v = v^1 = v^2, \\
f_{ij}^k > 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Через s, a и t обозначены источник, коммутационный узел и сток соответственно. Отметим, что данная задача аналогична задаче о двухпродуктовом потоке в неориентированной сети. Однако в рассматриваемом случае мы имеем не два вида продукта, а два различных типа потока. Кроме того, требуется, чтобы потоки «продуктов» 1 и 2 были равными. В задаче о двухпродуктовом потоке требуется максимизировать суммарный поток продуктов; теперь же максимизируется величина ½(v1 + v2). Можно показать, что максимальный поток через коммутационный узел равен min[v1, v2, ½ max[v1 + v2]], где v1 и v2 – это максимальные потоки из s в a и из a в t соответственно. Данный результат лежит в основе простого алгоритма, в котором последовательно решаются обычные задачи о максимальном потоке.

Шаг 1. С помощью алгоритма решения задачи о максимальном однопродуктовом потоке найти величины v1 и v2, где v1 и v2 – это максимальные потоки из s в a и из a в t соответственно.

Шаг 2. Построить новую сеть G', вводя дополнительный узел s' и дуги (s', s), (s‘, t) с неограниченной пропускной способностью. Пусть v – максимальный поток из s' в a в построенной сети.

Шаг 3. Вычислить величину v* = min[v1, v2, ½ v]. Если v* = 0, то алгоритм прекращает работу. Допустимого потока не существует.

Шаг 4. Построить новую сеть G'', добавляя к исходной сети узел s'' и дуги (s'', s) и (s'', t), пропускная способность каждой из которых равна v*. Найти максимальный поток из s'' в a в построенной сети. Разложить этот поток на поток из s'' в a, протекающий через s, и поток из a в s'', протекающий через t. Исключить из сети дополнительные узлы и дуги. В результате будет найден максимальный поток, протекающий через коммутационный узел a.

Для того чтобы различать между собой «продукты», можно каждый поток по пути из s' в a, проходящий через s, рассматривать как поток «продукта 1», а поток по пути из s' в a, проходящий через t, рассматривать как поток «продукта 2». На шаге 4 строится такой поток, что величина той его части, которая протекает через a, равна v*.

Рассмотрим пример решения задачи о коммутационном узле. Необходимо найти максимальный поток через узел «a» в сети, указанной на рис. 1.

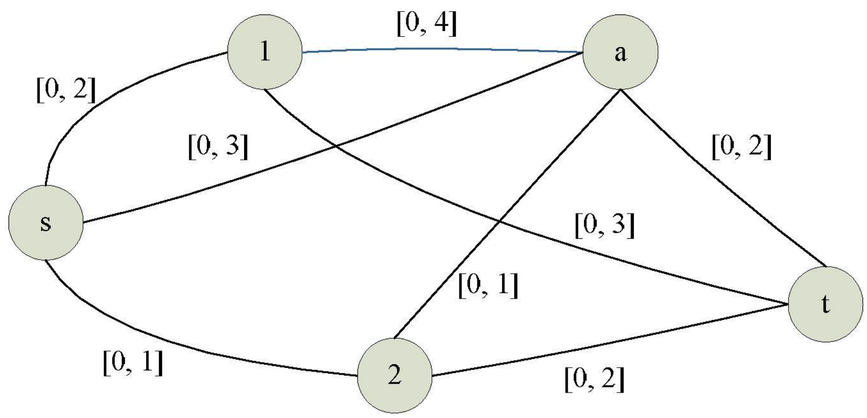

Рис. 1. Исходный граф для задачи

1. Находим максимальные потоки из «s» в «a» и из «a» в «t», решая задачу о максимальном однопродуктовом потоке методом Форда-Фалкерсона. Решения представлены на рис. 2 и 3.

Величины v1 и v2 равны 6 и 7 соответственно.

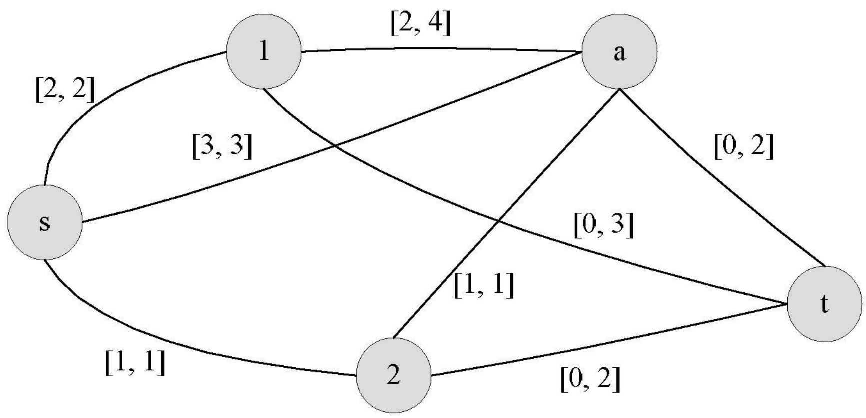

Рис. 2. Поиск максимального потока из «s» в «a»

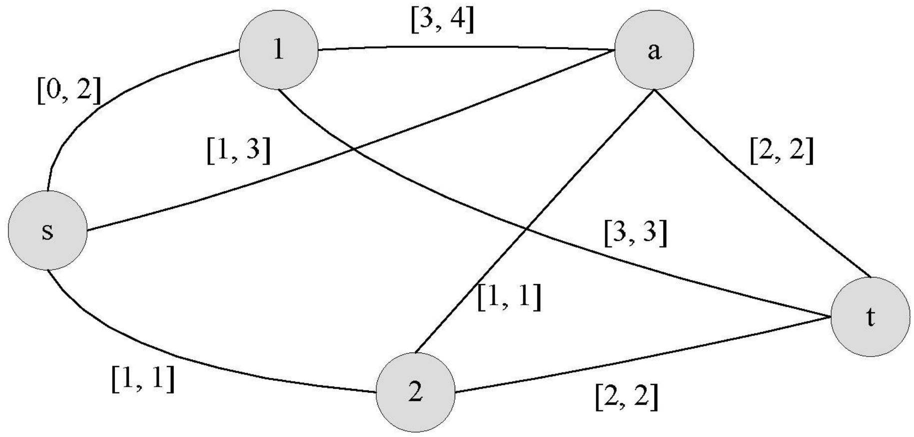

Рис. 3. Поиск максимального потока из «a» в «t»

2. Строим сеть G’, вводя узел s’ и дуги (s’, s) и (s’, t) с бесконечными пропускными способностями, показанными на рис. 4. Максимальный поток из «s’» в «a» в s равен 10.

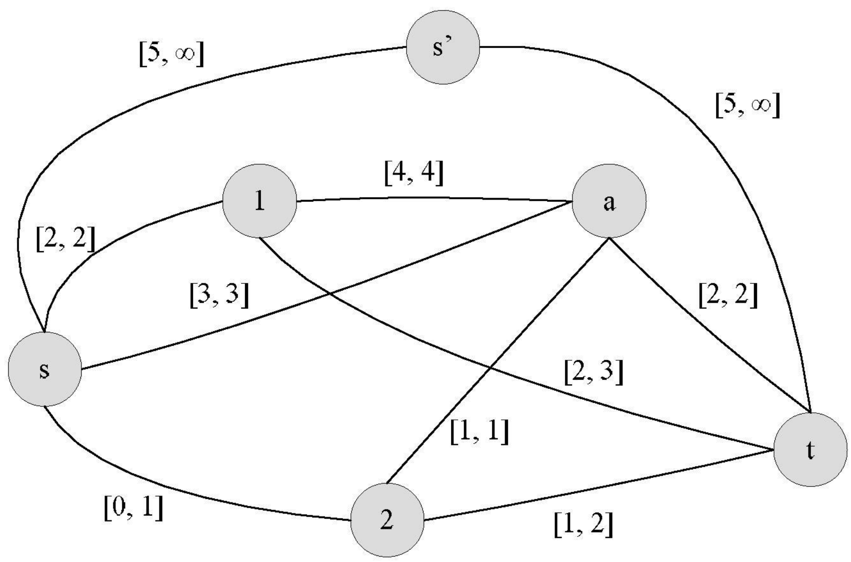

Рис. 4. Поиск максимального потока из «s’» в «t»

3. Максимальный поток через коммутационный узел «a» равен min(v1, v2, ½ vs), т.е. min(6, 7, 5), а именно 5.

Ответ: Максимальный поток через коммутационный узел «a» равен 5.

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к итерационному процессу. Данный алгоритм может работать длительное время из-за использования метода Форда-Фалкерсона для нахождения максимального потока в однопродуктовой сети, так как данный метод напрямую зависит от пропускной способности ветвей графа. В качестве альтернативы можно использовать алгоритм Эдмондса – Карпа.

Нами был разобран алгоритм нахождения максимального патока по шагам, а также приведен пример решения задачи с помощью данного алгоритма.

Список литературы

1. Кормен Т. Х. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Х. Кормен, Ч. И. Лейзерсон, Р. Л. Ривест, К. Штайн. – 2-е изд. – Москва : Вильямс, 2006. – С. 1296. – ISBN 0-07-013151-1.

2. Левитин А. В. Алгоритмы: введение в разработку и анализ / А. В. Левитин. – Москва : Вильямс, 2006. – С. 189–195. – ISBN 0-201-74395-7.

3. Филлипс Д. Методы анализа сетей : пер. с англ. / Д. Филлипс, А. Гарсиа-Диас. – Москва : Мир, 1984. – 496 с.

References

1. Kormen T. Kh., Leyzerson Ch. I., Rivest R. L., Shtayn K. *Algoritmy: postroenie i analiz* [Algorithms: construction and analysis]. Moscow, Williams, 2006, p. 1296, ISBN 0-07-013151-1.

2. Levitin A. V. *Algoritmy: vvedenie v razrabotku i analiz* [Algorithms: introduction to the design and analysis]. Moscow, Williams, 2006, pp. 189–195, ISBN 0-201-74395-7.

3. Fillips D., Garsia-Dias A. *Metody analiza setey* [Methods of network analysis], Moscow, Mir. 496 p.

УДК 519.24 + 681.3

ОДНО- И МНОГОМЕРНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ: АНАЛИЗ ВОЗМОЖНЫХ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ ОТСЧЕТОВ И ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК

Брумштейн Юрий Моисеевич, кандидат технических наук, Астраханский государственный университет, 414056, Российская Федерация, г. Астрахань, ул. Татищева, 20а, e-mail: brum2003@mail.ru, maivam@rambler.ru

Иванова Мария Владимировна, аспирант, Астраханский государственный университет, 414056, Российская Федерация, г. Астрахань, ул. Татищева, 20а, e-mail: rum2003@mail.ru, maivam@rambler.ru

Обоснована актуальность рассмотрения тематики, связанной с одномерными и многомерными временными рядами. Для одномерных временных рядов представлены их возможные классификации. Особое внимание уделено моделям оптимального выбора дискретности отсчетов по времени для равномерных временных рядов. Для квазиравномерных рядов рассмотрены возможные показатели, описывающие их отличия от равномерных. Проанализированы вопросы точности данных в одномерных временных рядах, предложены модели оптимального выбора точности при фиксированном шаге по времени между отсчетами. Проанализированы модели совместного выбора шага по времени и точности для равномерных временных рядов. Рассмотрены подходы к выбору переменного шага по времени в случае переменной во времени скорости изменения параметра, описываемого временным рядом. Описаны традиционные подходы к анализу одномерных временных рядов на основе выделения тренда, периодической компоненты, случайных остатков. Показаны варианты обобщения этих