

УДК 532.526

МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА С ПОПЕРЕЧНЫМ ВДУВОМ СТРУЙ

Бекетаева Асель Орозалиевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт математики и математического моделирования МОиН, 050010, Республики Казахстан, г. Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: azimaras@mail.ru

Дуйшеналиев Туратбек Болотбекович, доктор физико-математических наук, профессор, ректор, Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, 720044, Киргизская Республика, г. Бишкек, пр. Мира, 66, e-mail: rector@kstu.kg, duishenaliev@mail.ru

Рассмотрена задача поперечного вдува круглой струи в сверхзвуковой поток. Эта задача имеет важное прикладное значение в отношении обеспечения эффективности работы двигателей летательных аппаратов - в том числе с укороченным взлетом и посадкой, самолетов палубной авиации и пр. Представлена математическая постановка задачи, обоснована ее формализация для целей моделирования. Моделирование осуществлялось численно – с использованием осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса для совершенного газа. Описана использованная дискретизация в пространственно-временной области. В работе исследованы характеристики обтекания основным потоком «виртуального препятствия», создаваемого поперечным вдувом струи. Результаты визуализированы с помощью картин «полей течений» и сопоставлены с имеющимися экспериментальными данными. Полученные результаты компьютерного моделирования для распределения полей скорости качественно согласуются с известными экспериментальными данными.

Ключевые слова: число Рейнольдса, сверхзвуковой поток, число Прандтля, коэффициент вязкости, тензор напряжения, турбулентность, компьютерное моделирование, методы визуализации

MODELS OF SPATIAL SUPERSONIC FLOW OF A PERFECT GAS WITH TRANSVERSE BLOWING JETS

Beketaeva Asel O., Ph.D. (Physical and Mathematical), Senior Researcher, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of Ministry of Education and Science, 125 Pushkin St., Almaty, 050010, Republic of Kazakhstan, e-mail: azimaras@mail.ru

Duyshenaliev Turatbek B., D.Sc. (Physical and Mathematical), Professor, Rector, Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov, 66 Mira Ave., Bishkek, 720044, Kyrgyz Republic, e-mail: rector@kstu.kg, duishenaliev@mail.ru

In article is considered the problem of round stream cross input of in supersonic stream. This task has important applied value, concerning ensuring overall performance of aircraft engines - including with the truncated take off and landing, deck aircraft planes so forth. Authors are presented mathematical problem definition, proved its formalization for modeling. Modeling was carried out in number – with use of averaged by Reynolds Navier-Stokes's equations for perfect gas. In article are described used sampling in spatial-time area. Authors are investigated characteristics of a flow by the main stream at «virtual obstacle», created by a cross input of additional stream. Results are visualized by means of «fields of currents» pictures and compared with the available experimental data. Received results of computer modeling for distribution of speed fields qualitatively coordinated with known experimental data.

Keywords: Reynolds number, supersonic flow, the Prandtl number, the coefficient of viscosity, stress tensor, turbulence, computer modeling, visualization methods

Введение. Теоретическое и практическое изучение взаимодействия поперечной струи со сверхзвуковым потоком в практическом плане связано, прежде всего, с разработкой новых конструкций самолетов короткого взлета и посадки (в т.ч. в рамках развития палубной авиации); авиационных силовых установок с управляемым вектором тяги; проектированием прямоточных воздушно-реактивных двигателей. Эффективность проектно-конструкторских решений для описываемых объектов во многом определяется точностью результатов моделирования соответствующих процессов. Возможности их натурного или лабораторного моделирования являются дорогостоящими, небезопасными и во многих случаях достаточно ограниченными. В то же время методики математического и компьютерного моделирования в существующих публикациях отражены недостаточно полно. Поэтому целью настоящей статьи является разработка численных методов моделирования процессов взаимодействия поперечной круглой в сечении дозвуковой струи со сверхзвуковым потоком в прямоугольном канале. Для определенности рассматривается вдув струи только со стороны нижней стенки канала.

Общая характеристика проблематики работы. При вдуве поперечной струи в сверхзвуковой поток наблюдается повышение тяги, развиваемой струей, по сравнению со случаем, когда вдув струи осуществляется в неподвижную среду. Это объясняется взаимодействием струи с основным потоком, при котором возникает сложная картина течения. При обтекании «виртуального препятствия», создаваемого боковым вдувом струи образуется система скачков уплотнения, возникают зоны возвратных течений, как перед струей, так и за ней. Характер взаимодействия струи с набегающим потоком зависит от следующих факторов: интенсивности вдува, характеризующейся отношением давления p_0 на срезе сопла к p_∞ давлению в потоке; числом Маха струи; параметрами набегающего потока, такими как число Маха потока M_∞ и число Рейнольдса; размерами щели или круглого сопла. В качестве геометрических параметров, характеризующих инжекцию поперечных струй, обычно рассматривают длину и конфигурацию зоны отрыва перед струей, а также распределение давления на стенке вблизи сопла инжекции.

Обтекание струями препятствий достаточно хорошо исследовано экспериментально [1,5,6]. Среди «численных исследований» известны, в частности, работы, в которых моделируется поперечный вдув водорода в канал прямоточного воздушно-реактивного двигателя (ПВРД) [3,8,9,11,13]. В отношении вдува поперечных струй целесообразно также отметить [10,14]. В большинстве таких работ в основном производятся тестовые расчеты, но практически отсутствует численное исследование физических аспектов полученных схем течения. Это, в основном обусловлено сложной структурой течения в области вдува струи.

Постановка задачи. Далее мы будем иметь в виду расчетную схему задачи, приведенную на рисунке 1.

В качестве основы для постановки задачи нами была принята система трехмерных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного газа, записанная в декартовой системе координат в консервативной форме. Мы будем использовать представление этой системы в безразмерной форме в виде

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{E} - \bar{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{F} - \bar{F}_v)}{\partial z} + \frac{\partial (\bar{G} - \bar{G}_v)}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

В (1) компоненты векторов $\vec{U}, \vec{E}, \vec{F}, \vec{G}$ определяются выражениями:

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E_t + P)u \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (E_t + P)w \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E_t + P)v \end{pmatrix},$$

$$\bar{E}_v = (0, \quad \tau_{xx}, \quad \tau_{xy}, \quad \tau_{xz}, \quad u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x)^T,$$

$$\vec{F}_v = \left(0, \quad \tau_{xz}, \quad \tau_{yz}, \quad \tau_{zz}, \quad u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z \right)^T,$$

$$\vec{G}_v = (0, \quad \tau_{xy}, \quad \tau_{yy}, \quad \tau_{yz}, \quad u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_v)^T.$$

$$p = (\gamma - 1) \left[E_t - \frac{1}{2} (\rho u^2 + \rho w^2 + \rho v^2) \right],$$

$$T = \left(\frac{1}{\rho c_v} \right) \left[E_t - \frac{1}{2} (\rho u^2 + \rho w^2 + \rho v^2) \right], \quad c_v = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_\infty^2}.$$

Тензоры напряжения и потоки тепла выражаются в виде:

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \frac{2}{3} \frac{\mu_t}{Re} (2u_x - w_z - v_y), \quad \tau_{zz} = \frac{2}{3} \frac{\mu_t}{Re} (2w_z - u_x - v_y), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3} \frac{\mu_t}{Re} (2v_y - u_x - w_z), \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \frac{\mu_t}{Re} (u_z + w_x), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu_t}{Re} (u_y + v_x), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\mu_t}{Re} (w_y + v_z), \\ q_x &= -\frac{\mu_t}{(\gamma-1)M_\infty^2 Pr Re} T_x, \quad q_y = -\frac{\mu_t}{(\gamma-1)M_\infty^2 Pr Re} T_y, \quad q_z = -\frac{\mu_t}{(\gamma-1)M_\infty^2 Pr Re} T_z.\end{aligned}$$

Здесь t - время, u, w, v - компоненты скорости потока в продольном и поперечных направлениях, ρ - плотность, P - давление, T - температура, c_v - теплоемкость при постоянном объеме, γ - показатель адиабаты, M_0 и M_∞ - числа Маха струи и потока, μ_t - коэффициент турбулентной вязкости, Re - число Рейнольдса, Pr - число Прандля, 0 - отнесен к параметрам струи, ∞ - к параметрам потока.

В качестве определяющих параметров в (1) приняты параметры на входе $u_\infty, \rho_\infty, T_\infty$. Давление и полная энергия отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$. Характерным размером длины является диаметр круглого отверстия.

Система (1) замкнута с помощью алгебраической модели турбулентности Болдуина-Ломакса [7].

Граничные условия. На входе (см. рис.1) параметры потока задаются так

$$u = 1, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \rho = 1, \quad T = 1, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq H_y, \quad 0 \leq z \leq H_z.$$

На нижней стенке (см. рис.1) было принято

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad 0 < x \leq H_x, \quad 0 \leq y \leq H_y.$$

На струе условия были взяты в виде

$$u = 0, \quad v = 0, \quad T = 0,6, \quad w = \sqrt{T} M_0 / M_\infty, \quad P = n P_\infty, \quad z = 0, \quad |x^2 + y^2| \leq R.$$

Вблизи стенки канала задается пограничный слой, а продольная составляющая скорости в нем аппроксимируется степенным законом.

На верхней границе поперечного сечения канала задается условие симметрии в виде

$$w = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = H_z, \quad 0 < x \leq H_x, \quad 0 \leq y \leq H_y.$$

На боковых границах канала принято

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad y = H_y, \quad 0 < x \leq H_x, \quad 0 \leq z \leq H_z,$$

где H_x - длина, H_z - высота, H_y - ширина расчетной области, R - радиус круглого отверстия.

На выходной границе (рис. 1) задается условие неотражения [12].

Метод решения. Для моделирования задачи осуществляется ее пространственно-временная дискретизация. При этом с целью более точного учета течения в пограничном слое, вблизи стенки и на уровне щели (т.е. в областях больших градиентов давления), вводится сгущение сетки в продольном и в поперечном направлении с помощью преобразований:

$$\xi = \xi(x), \quad \zeta = \zeta(y), \quad \eta = \eta(z). \quad (2)$$

При этом линеаризованная относительно вектора $\tilde{U}$ система уравнений (1) в обобщенных координатах запишется в виде:

$$\left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial A_{\xi}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial B_{\eta}^n}{\partial \eta} + \frac{\partial Q_{\zeta}^n}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\mu_t \xi_x^2}{\text{Re} J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\mu_t \eta_z^2}{\text{Re} J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\mu_t \zeta_y^2}{\text{Re} J} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) \right\} \right] \tilde{U}^{n+1} =$$

$$= \tilde{U}^n + \Delta t \left[2 \left(\frac{\partial \tilde{E}_{vm}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}^n}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_{vm}^n}{\partial \zeta} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{E}_{vm}^{n-1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}^{n-1}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_{vm}^{n-1}}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial \tilde{E}_{v22}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v22}^n}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_{v22}^n}{\partial \zeta} \right] + O(\Delta^2) \quad (3)$$

где $\tilde{U} = \frac{1}{J} U$, $J = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, z, y)}$ - якобиан преобразования, $A_{\xi} = \xi_x A$, $B_{\eta} = \eta_z B$, $Q_{\zeta} = \zeta_y Q$,

$A = \frac{\partial E}{\partial U}$, $B = \frac{\partial F}{\partial U}$, $Q = \frac{\partial G}{\partial U}$ - матрицы Якоби.

Диффузионные члены представлены в виде суммы вторых производных искомого вектора U с переменными коэффициентами вязкости и векторов $\tilde{E}_{v22}^n$, $\tilde{F}_{v22}^n$ и $\tilde{G}_{v22}^n$, содержащих оставшиеся диссипативные члены.

Для диффузионных векторов потоков со смешанными производными $\tilde{E}_{vm}$, $\tilde{F}_{vm}$, $\tilde{G}_{vm}$ используется аппроксимация по явной разностной схеме при равномерном шаге по времени с вторым порядком точности [4].

Система (3) решается методом Бима-Уорминга. Для этой цели применяется факторизация, что приводит к трем одномерным операторам, решение которых производится матричной прогонкой. В рассматриваемом алгоритме используется три шага.

$$\begin{aligned} 1 \text{ шаг. } & \left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial A_{\xi}^n}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\mu_t \xi_x^2}{\text{Re} J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) \right\} \right] U^* = RHS^n \\ 2 \text{ шаг. } & \left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial B_{\eta}^n}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\mu_t \eta_z^2}{\text{Re} J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) \right\} \right] U^{**} = U^* \\ 3 \text{ шаг. } & \left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial Q_{\zeta}^n}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\mu_t \zeta_y^2}{\text{Re} J} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) \right\} \right] \tilde{U}^{n+1} = U^{**}, \end{aligned} \quad (4)$$

где RHS^n - правая часть системы уравнений (3).

При аппроксимации производных по пространственным координатам в конвективных и диффузионных членах нами были использованы центрально-разностные операторы с вторым порядком точности.

Для численного моделирования использовалась специально разработанная программа, комплексно реализующая описанные выше алгоритмы.

Особенности методики проведения вычислительных экспериментов. При проведении расчетов использовались преобразования координат следующего вида [2]:

$$\xi = K + \frac{1}{\tau} \text{arsh} \left[\left(\frac{x}{x_c} - 1 \right) \text{sh}(\tau K) \right], \quad \eta = H \left[(\beta + 1) - (\beta - 1) \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^{1 - \frac{z}{a}} \right] / \left[\left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^{1 - \frac{z}{a}} + 1 \right],$$

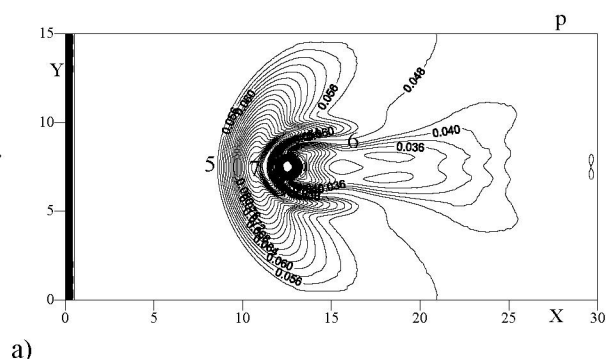
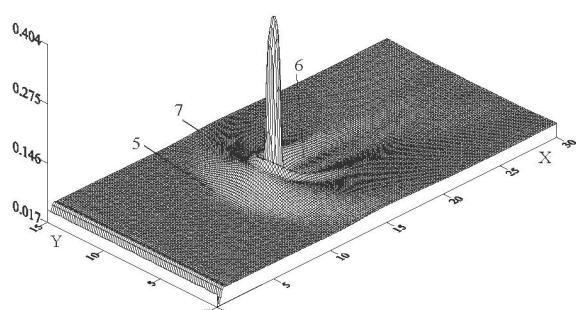
$$\zeta = K + \frac{1}{\tau} \text{arsh} \left[\left(\frac{y}{y_c} - 1 \right) \text{sh}(\tau K) \right],$$

где $K = \frac{1}{2\tau} \ln \left[\frac{1 + (e^\tau - 1) \frac{x_c}{L}}{1 - (e^\tau - 1) \frac{x_c}{L}} \right]$, β, τ - параметры сгущения, $\beta, \tau > 1$, a - высота расчетной области в обобщенных координатах, x_c и y_c - точки, относительно которых производится сгущение.

Для подавления высокочастотных возмущений на окончательном этапе вводилось сглаживание четвертого порядка с малым коэффициентом ε при сглаживающих членах. Расчет производился на сетке размером $201 \times 101 \times 81$ с шагами по пространственным координатам $\Delta x = 0,1 \div 0,5$; $\Delta z = 0,06 \div 0,25$; $\Delta y = 0,1 \div 0,5$. Шаг по времени варьировался в пределах $\Delta t = 0,025 \div 0,05$.

Обсуждение результатов вычислительных экспериментов. Существующие на данный момент экспериментальные работы дают качественное понимание закономерностей течения сверхзвуковой поток при поперечном вдуве в него струи. В работах [1-3,8], продемонстрированы основные особенности такого течения. Система скачков в набегающем потоке состоит из основного скачка, косоугольного скачка и замыкающего скачка. Внутри струи наблюдается бочкообразный скачок и центральный скачок (диск Маха).

Известно, что распределение давления вблизи струи на стенке, т.е. поле изобарических кривых, аппроксимируется криволинейными замкнутыми, вложенными друг в друга эллипсами, давление вдоль которых постоянно. Эту картину можно наблюдать на рисунке 2а ($n=10$, $z=0,063$), где показано распределение изобар вблизи стенки. Перед боковой струей (которую можно рассматривать как виртуальное препятствие) давление принимает максимальное значение, а за этой струей образуется зона с пониженным давлением. Также на графике показаны границы косоугольного (позиция 5 - на рисунке 1 и 2а) и хвостового (позиция 6) скачков уплотнения. Эти линии являются границами передней и задней застойных зон. Здесь же прослеживается линия 7, на которой потоки, идущие сверху-вниз к обтекаемой поверхности из области повышенного давления за замыкающим скачком уплотнения у стенки растекаются в разные стороны. На уровне $z=1,01$ (рисунок 2б) замыкающий скачок уплотнения выделен интенсивными (жирными) линиями в виде полумесяца. Далее, в зоне основного потока (рисунок 2в, $z=1,8$), головной скачок уплотнения имеет ярко выраженную клиновидную форму.



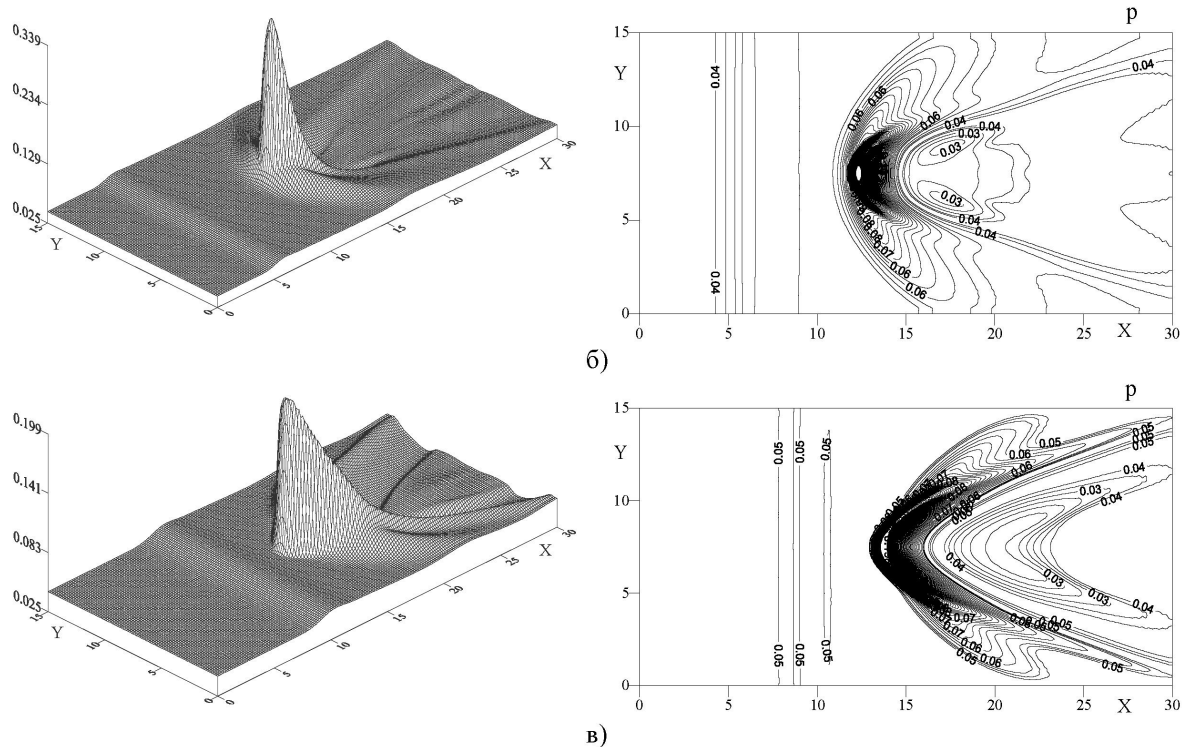
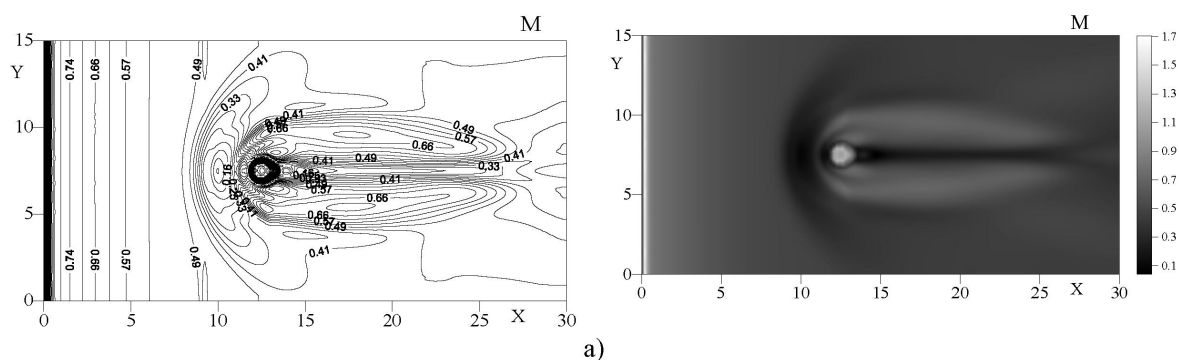


Рис. 2. Распределение изобар в плоскости « ux » в различных сечениях z

а) $z=0,063$; б) $z=1,01$; в) $z=1,8$.

$M_\infty = 4$; $M_0 = 1$; $n = 10$; $Pr = 0,9$; $Re = 10^4$; $\gamma = 1,4$.

Из картины распределения местного числа Маха в плоскости « ux » (рисунок 3 – «а» - $z=0,063$; «б» - $z=1,01$; «в» $z=1,8$), хорошо видна граница возникающей бочкообразной структуры во вдуваемой струе.



а)

а) $z = 0,063$; б) $z = 1,01$; в) $z = 1,8$.
 $M_\infty = 4$; $M_0 = 1$; $n = 10$; $\text{Pr} = 0,9$; $\text{Re} = 10^4$; $\gamma = 1,4$.

Далее авторами был выполнен численный эксперимент для поставленной задачи с параметрами ($M_\infty = 3$; , $M_0 = 1$; , $d = 1,4$ см; $Re = 1,87 \cdot 10^7$; , $n = 15$), где течение вблизи стенки сравнивалось с результатами экспериментов, приведенными в работе [1]. На рисунке 4а ($z = 0,06$) представлено поле вектора скорости вблизи стенки. Здесь хорошо видны описанные ранее для рисунков 1 и 2 линии стекания (линии 1 и 2) и линия растекания (линия 3). Ниже, на рисунке 4б показано изображение (фото) распространения визуализирующего состава на поверхности пластины – это дает наглядное представление о характере течения вблизи места входа в основной поток поперечной струи.

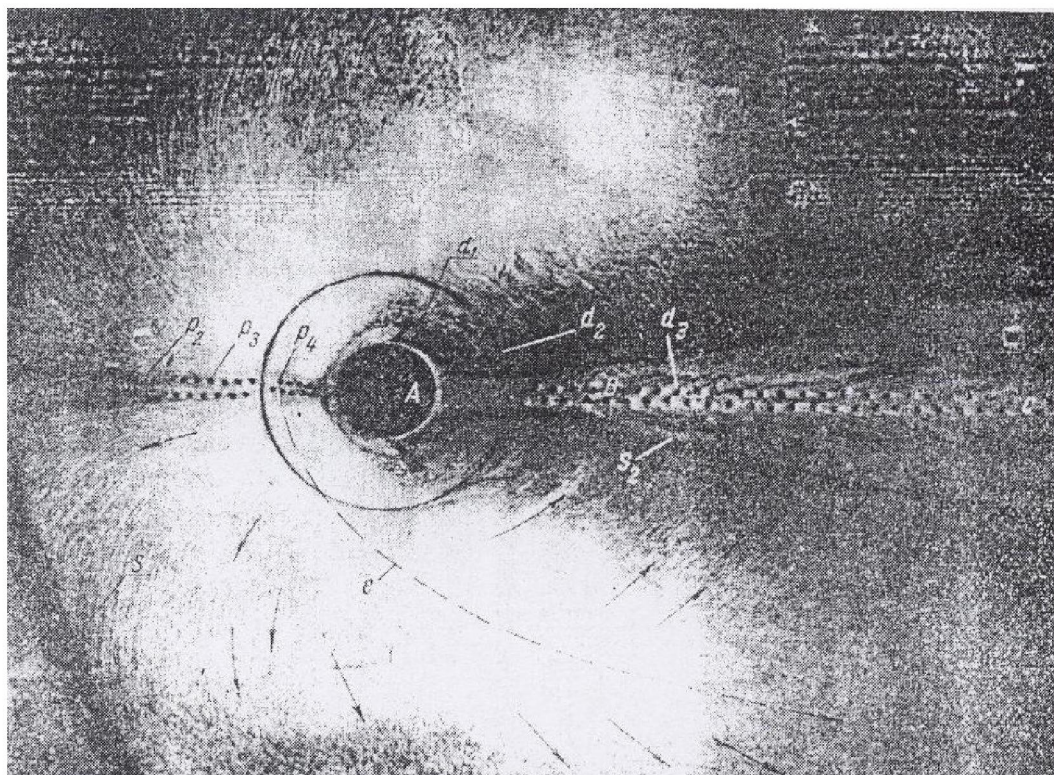
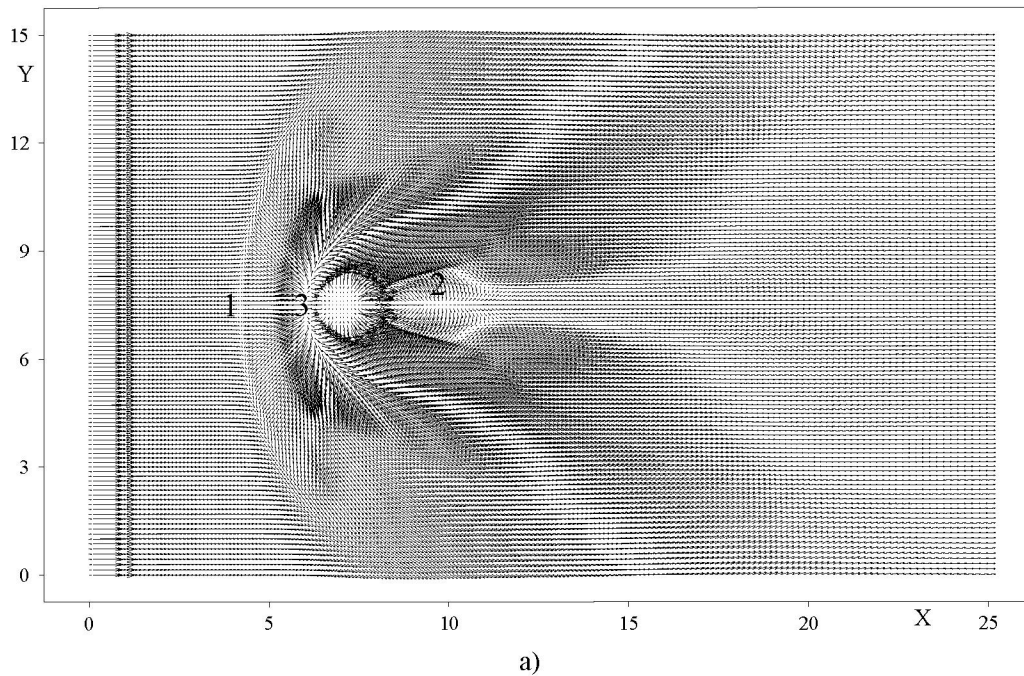


Рис. 4. Качественное сравнение расчетов
для поля вектора скоростей вблизи стенки с опытными данными [1]

а) расчеты для сечения $z = 0,06$; б) опытные данные $M_\infty = 3$; $M_0 = 1$; $h = 1,4$; $Re = 1,87 \cdot 10^7$; $n = 15$

Таким образом, из приведенных рисунков можно сделать вывод о качественной согласованности результатов вычислительного и физического экспериментов.

Итак, сделаем **выводы**.

1. Рассмотренные в статье задачи имеют как теоретическое, так и прикладное значение.

2. Используемые схемы пространственно-временной дискретизации области и алгоритмы численного моделирования обеспечивают по крайней мере качественное соответствие результатов вычислительных и физических экспериментов.

3. Дальнейшим развитием рассмотренных моделей может быть переход от статических задач течения воздуха к динамическим – это позволит моделировать изменяющиеся режимы работы двигателей.

Список использованных источников

1. Авдеевский В.С., Медведев К.И., Полянский М.Н. Взаимодействие сверхзвукового потока с поперечной струей, вдуваемой через круглое отверстие в пластине // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 5. С.193-197.
2. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т.1 384 стр.
3. Бекетаева А.О., Найманова А.Ж. Численное моделирование сверхзвукового течения с поперечным вдувом струй // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т.45, №3. С.72-80
4. Бим Р.М., Уорминг Р.Ф. Неявная факторизованная разностная схема для уравнений Навье-Стокса течения сжимаемого газа // Ракетная техника и космонавтика. 1978. Т. 16, № 4. С.145-156.
5. Глаголев А.И., Зубков А.И., Панов Ю.А. Обтекание струйного газообразного препятствия на пластине сверхзвуковым потоком // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 3. С.97-102.
6. Глаголев А.И., Зубков А.И., Панов Ю.А. Взаимодействие струи газа, вытекающей из отверстия в пластине, со сверхзвуковым потоком // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 2. С.99-102.
7. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. Москва: Мир, 1991. -504с.
8. Beresh, S. J., Henfling, J. F., Erven, R. J., and Spillers, R. W., Penetration of a Transverse Supersonic Jet into a Subsonic Compressible Crossflow, AIAA Journal, Vol. 43, No. 2, 2005, pp. 379–389
9. Chenault C.F., Beran P.S. Numerical Investigation of Supersonic Injection Using a Reynolds Stress Turbulence Model // AIAA Journal. 1999. Vol.37, № 10. P.1257-1269.
10. Dickmann, D.A. and Lu, F.K., Jet in Supersonic Crossflow on a Flat Plate, AIAA-2006-3451, 2006.
11. Grasso F., Magi V., Simulation of Transverse Gas Injection in Turbulent Supersonic Air Flows // AIAA Journal. 1995. Vol.33, № 1. P.56-62.
12. Poinso T.J., Lele S.K. Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows // Journal of Computational Physics. 1992. № 101. P.104-129.
13. Sun De-chaun, HU Chun-bo, CAI Ti-min Computation of Supersonic turbulent Flowfield with Transfer Injection // Applied Mathematics and Mechanics 2002. Vol. 23, №1.
14. Viti V., Neel R., Schetz J. Detailed Flow Physics of the Supersonic Jet Interaction Flow Field // Physics of Fluids. 2009. Vol. 21. April

References

1. Avduevskiy V.S., Medvedev K.I., Polyanskiy M.N. Vzaimodeystvie sverkhzvukovogo potoka s poperechnoy struey, vduvaemoy cherez krugloe otverstie v plastine [Interaction of a supersonic stream with the cross stream blown through a round opening in a plate]// Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza. [News of Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of liquid and gas] 1970. № 5. S.193-197.
2. Anderson D., Tannekhil Dzh., Pletcher R. Vychislitel'naya gidromekhanika i teploobmen. [Computing hydromechanics and heat exchange] M.: Mir, 1990.

3. Beketaeva A.O., Naymanova A.Zh. Chislennoe modelirovanie sverkhzvukovogo techeniya s poperechnym vduvom struy [Numerical modeling of a supersonic current with a cross vduv of streams] // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. [Applied mechanics and technical physics.] 2004. T.45, №3. S.72-80
4. Bim R.M., Uorming R.F. Neyavnaya faktorizovannaya raznostnaya skhema dlya uravneniy Nave-Stoksa techeniya szhimaemogo gaza [The implicit factored differential scheme for Navier-Stokes's equations of a current of the compressed gas] //Raktnaya tekhnika i kosmonavtika. [Rocketry and astronautics] 1978. T. 16, № 4. S.145-156.
5. Glagolev A.I., Zubkov A.I., Panov Yu.A. Obtekanie struynogo gazoobraznogo prepyatstviya na plastine sverkhzvukovym potokom [Flow of a jet gaseous obstacle in a plate supersonic stream] // Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza. [News of Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of liquid and gas] 1967. № 3. S.97-102.
6. Glagolev A.I., Zubkov A.I., Panov Yu.A. Vzaimodeystvie strui gaza, vytekayushchey iz otverstiya v plastine, so sverkhzvukovym potokom [Interaction of the stream of gas following from an opening in a plate with a supersonic stream] // Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza [News of Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of liquid and gas]. 1968. № 2. S.99-102.
7. Fletcher K. Vychislitelnye metody v dinamike zhidkosti. [Computing methods in dynamics of liquid] Moskva: Mir, 1991. -504 s.
8. Beresh, S. J., Henfling, J. F., Erven, R. J., and Spillers, R. W., Penetration of a Transverse Supersonic Jet into a Subsonic Compressible Crossflow, AIAA Journal, Vol. 43, No. 2, 2005, pp. 379–389
9. Chenault C.F., Beran P.S. Numerical Investigation of Supersonic Injection Using a Reynolds Stress Turbulence Model // AIAA Journal. 1999. Vol.37, № 10. R.1257-1269.
10. Dickmann, D.A. and Lu, F.K., "Jet in Supersonic Crossflow on a Flat Plate," AIAA-2006-3451, 2006.
11. Grasso F., Magi V., Simulation of Transverse Gas Injection in Turbulent Supersonic Air Flows // AIAA Journal. 1995. Vol.33, № 1. R.56-62.
12. Poinso T.J., Lele S.K. Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows // Journal of Computational Physics. 1992. № 101. P.104-129.
13. Sun De-chaun, HU Chun-bo, CAI Ti-min Computation of Supersonic turbulent Flowfield with Transfer Injection // Applied Mathematics and Mechanics 2002. Vol. 23, №1.
14. Viti V., Neel R., Schetz J. Detailed Flow Physics of the Supersonic Jet Interaction Flow Field //Physics of Fluids. 2009. Vol. 21. April

УДК.: 514.763.53:519.633.2:539.378

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПЛАСТИН ПОД НАГРУЗКОЙ

Дуйшеналиев Туратбек Болотбекович, доктор физико-математических наук, профессор, ректор, Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, 720044, Киргизская Республика, г. Бишкек, пр. Мира, 66, e-mail: rector@kstu.kg, duishenaliev@mail.ru

Искендер Козубай, преподаватель, Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, 720044, Киргизская Республика, г. Бишкек, пр. Мира, 66, e-mail: iskan-7@mail.ru, тел.: +996705194185

Исследования закономерностей деформирования конструкционных материалов (металлов и их сплавов) при сложном нагружении имеют принципиальное значение как с точки зрения фундаментальных основ теории упругости, так и в плане практических приложений, связанных с прочностными расчётами конструкций и аппаратов новой техники, подверженных воздействию нагрузок. Эти