ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ, РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, АЛГОРИТМОВ, ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ

УДК 681.3

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВАРЬИРУЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕГО РАЗРЕЖЕННОСТЬ МАТРИЦЫ

Статья поступила в редакцию 09.12.2013, в окончательном варианте 08.03.2014.

Кочура Александр Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 34, e-mail: kochura36@mail.ru

Подкользина Людмила Викторовна, кандидат педагогических наук, старший преподаватель, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 34, e-mail: texnolog@zavod-vtuz.ru

Ивакин Ян Альбертович, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук, 199178, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Васильевский остров, 14 линия, 39, e-mail: ivakin@oogis.ru

Нидзиев Иван Иванович, кандидат технических наук, Военный учебно-научный центр Военно-морского флота «Военно-морская академия им. Н.Г. Кузнецова», 197045, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Ушаковская наб., 18, ivan_005@mail.ru

Многократное решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности (БР) необходимо для целого ряда задач в сфере экономики, моделирования климата, машиностроительных расчетов и пр. Показаны достоинства и недостатки прямых и итерационных методов решения СЛАУ БР. В статье предложен новый «прямой» метод (алгоритм) решения СЛАУ с варьируемыми параметрами для матриц БР. В предложенном методе с учетом разреженности матрицы эффективно используется информация о решении базовой СЛАУ. Это позволяет в задачах, использующих СЛАУ с БР, которые необходимо решать многократно, существенно повысить быстродействие расчетных алгоритмов за счет уменьшения количества вычислительных операций; снизить требования к объемам оперативной памяти ЭВМ. Авторы статьи детально описывают применяемые расчетные схемы, приводят все необходимые матричные уравнения.

Ключевые слова: системы линейных алгебраических уравнений, большая размерность, многовариантные расчеты, декомпозиция, технологии разреженных матриц, схема вариаций, диакоптика, уравнение Крона

DEVELOPMENT OF ALGORITHM OF SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS WITH VARIED PARAMETERS USING THE MATRIX SPARSENESS

Kochura Alexander Ye., D.Sc. (Physics and Mathematics), Professor, St. Petersburg State Politechnical University, 34 Polytechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation, e-mail: kochura36@mail.ru

Podkolzina Lyudmila V., Ph.D. (Pedagogics), Senior Lecturer, St. Petersburg State Politechnical University, 34 Polytekhnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation, e-mail: texnolog@zavod-vtuz.ru

**PRIKASPIYSKIY ZHURNAL: Upravlenie i Vysokie Tekhnologii
(CASPIAN JOURNAL: Management and High Technologies), 2014, 2 (26)
THEORETICAL BASES, DEVELOPMENT AND APPLICATION
OF MATHEMATICAL MODELS, ALGORITHMS, COMPUTER PROGRAMS**

Ivakin Yan A., D.Sc. (Engineering), Leading Researcher, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of Russian Academy of Sciences, 39 14th line, Vasilyevsky Island, St. Petersburg, 199178, Russian Federation, e-mail: ivakin@oogis.ru

Nidziev Ivan I., Ph.D. (Engineering), Military Scientific Training Center of Navy of N.G. Kuznetsov Naval Academy, 18 Ushakovskaya nab., St. Petersburg, 197045, Russian Federation, e-mail: ivan_005@mail.ru

The article describes a method for solving systems of linear equations with variable parameters, based on the use of sparse matrices calculated character processed , which is provided by the matrix equation purposeful structuring of the settlement system. The proposed method focuses primarily on large systems of linear equations with coefficient matrices densely filled. However, the transparent nature of the developed algorithms allows us to consider them useful and multivariate calculations of systems of linear equations of arbitrary dimension with different packing density matrices processed.

Known methods of sparse matrix techniques generally based on different ways of converting the original randomly sparse matrix in a certain way to ensure an ordered structure of the original matrix. The proposed method does not impose any restrictions on the initial filling density matrix of coefficients of the settlement system. This matrix can be absolutely tight. Sparseness of the estimated matrix is provided by structuring it in the extended phase space. The main point of the proposed structuring is not filling in the realignment matrix having initially sparse nature and the equivalent transformation of the original matrix densely filled in sparse matrix with uniform structure required. When this information is used effectively solving the base system and provides a minimum profile of the sparsity of the estimated matrix with vector character variations of its coefficients. In particular, the simultaneous variation of all the coefficients of any row or column of the matrix of the original settlement structuring provides a minimum (one-dimensional) profile calculated matrix sparsity equivalent in the extended phase space.

Keywords: systems of the linear equations, big dimension, multiple calculations, decomposition, technologies of the rarefied matrixes, the scheme of variations, диакоптика, the equation Krone

В основе большого числа важных научно-прикладных и производственно-технических задач лежит решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Особый класс СЛАУ – системы с большими разреженными матрицами (БРМ). Математические модели, использующие СЛАУ с БРМ, применяются при изучении статического равновесия физических, технических, биологических, производственно-экономических [9] и других типов систем; при решении с помощью конечно-разностных методов или методов конечных элементов многочисленных задач из области математической физики, строительной механики, механики конструкций летательных и иных аппаратов; прогнозирования метеорологических и гидрогеологических [2] процессов; обеспечения работы графических процессоров [16] и пр. Актуальность проблематики решения СЛАУ с БРМ подчеркивается публикацией большого количества работ как учебного характера [1], так и научного. Для последней группы стоит отметить как классические работы [4,10], так и ряд современных [5, 6, 12]. В некоторых случаях для решения указанных задач необходимы многовариантные расчеты, в которых различается лишь небольшое количество элементов матрицы СЛАУ. *Целью данной статьи* была разработка эффективных вычислительных алгоритмов для решения СЛАУ с БРМ именно такого класса задач.

Общая характеристика проблематики статьи. Двумя основными группами методов решения СЛАУ являются «прямые» и «итерационные». Несмотря на то, что итерационные методы позволяют во многих случаях эффективно решать СЛАУ с БРМ с минимальным использованием оперативной памяти [17], на практике их применение все же остается достаточно ограниченным. Основные причины такого положения: сложности при выборе начального приближения «вектора решения»; медленная сходимость (а для некоторых вариантов прямых методов и отсутствие гарантированной сходимости) к решению; в общем случае – сложность определения целесообразного момента завершения итераций при немонотонной сходимости и пр. Поэтому в данной статье рассматриваются только прямые методы.

Такие методы для СЛАУ небольшой размерности уже давно хорошо разработаны [11] и реализованы в виде высококачественного программного обеспечения для современных ПЭВМ в виде автономных программ и пакетов прикладных программ. Для СЛАУ с БРМ существуют специальные коллекции матриц [19]; алгоритмы [21] и библиотеки программ [13, 20], в том числе позволяющие учесть характер расположения ненулевых коэффициентов в матрицах. Особо отметим алгоритмы, дающие возможность эффективно организовать вычисления с различными правыми частями СЛАУ; алгоритмы для ленточных матриц [4, 10] и пр. Однако в большинстве типичных алгоритмов при изменении небольшого количества коэффициентов матрицы в СЛАУ с БРМ все вычисления приходится выполнять с самого начала. При этом для сокращения времени получения результатов может быть эффективным распараллеливание вычислений [3, 14, 18], в том числе и с применением «вычислительных кластеров».

Однако даже при использовании высокоскоростных вычислительных систем [6] многовариантные расчеты с варьируемыми параметрами матриц СЛАУ могут требовать слишком больших вычислительных затрат. Это особенно актуально для моделирования и, возможно, управления процессами, протекающими в реальном времени. Например, для задач прогнозирования погоды в метеорологии и большого числа задач, связанных с оперативной обработкой информации. Также это актуально для больших задач вариантного планирования в производственно-экономической сфере, включая транспортные задачи большой размерности, распределения ресурсов и пр.

Все возможные случаи многовариантных расчетов СЛАУ допускают обобщенную формализацию в виде проблемы параметрического синтеза линейной модели в ограниченном пространстве варьируемых параметров. В рамках такой схематизации могут учитываться и возможные структурные вариации исследуемой системы.

Для значительной части практически важных случаев многовариантных расчетов, в которых используются СЛАУ с БРМ, количество варьируемых элементов матрицы СЛАУ значительно меньше размерности СЛАУ, т.е. на каждом шаге вариантного анализа системы осуществляется ее локальная параметрическая модификация. Для расчетов таких систем целесообразным, по критериям экономичности вычислительных схем, представляется использование таких алгоритмов, в которых максимально эффективно использовалось бы решение для базовой модели, соответствующей исходной СЛАУ с БРМ. В качестве такой модели может выступать некоторая начальная параметрически определенная модель исследуемой системы или ее модель на предыдущем шаге многовариантного вычислительного процесса.

Существующие подходы к решению параметрически возмущенных линейных систем. Расчетная модель параметрически возмущенной линейной системы, связанной с рассматриваемой моделью задачи, имеет вид

$$\left(A_0 + \widetilde{A}\right)X = B, \tag{1}$$

где A_0 – основная матрица; $\widetilde{A}$ – матрица вариаций коэффициентов базовой системы; X – вектор неизвестных; B – вектор свободных членов базовой (исходной) СЛАУ.

Примем, что матрица $\widetilde{A}$ имеет сильно разреженную структуру. Если использовать стандартные методы решения СЛАУ, то при различных ее «разложениях» разреженная структура матрицы «разрушается» и она становится в общем случае полностью заполненной ненулевыми коэффициентами

$$\left(I + A_0^{-1}\widetilde{A}\right)X = X_0. \qquad (2)$$

Здесь X_0 – решение базовой СЛАУ; I – единичная матрица. Решение системы (2) даже менее экономично, чем новый расчет исходной СЛАУ с основной матрицей в виде $A_0 + \widetilde{A}$, поскольку сопровождается дополнительной потерей вычислительного времени за счет операций вычисления $A_0^{-1}\widetilde{A}$.

Известные методы для СЛАУ с «ленточными» разреженными матрицами имеют достаточно ограниченную сферу применения, так как далеко не для всех задач матрицы имеют ленточную структуру. Кроме того, если ширина «ленты» по отношению к размерности матрицы достаточно велика, то преимущества «ленточных алгоритмов» по отношению к алгоритмам для «полных» матриц утрачиваются [11].

Известный путь рационального использования разреженного характера матрицы вариаций $\widetilde{A}$ связан с применением «преобразования Крона», модифицированного для СЛАУ общего (несимметричного) вида [7, 8]. Соответствующий алгоритм в общем случае требует описания схемы вариаций модифицируемой СЛАУ на основе двух неполяризованных матриц инциденций: матрицы S_1 на множестве заходящих ветвей схемы вариаций и матрицы S_2 на множестве исходящих ветвей этой схемы. Используемая терминология вытекает из сопоставления модели вида (1) и ассоциированного с ней глобального орграфа с кодом $\{n, m, P\}$. Здесь n – количество узлов орграфа; m – количество ветвей орграфа, P – m – компонентный вектор весовых коэффициентов ветвей.

Узлы орграфа отображают структурные переменные модели, а ветви – взаимосвязи этих переменных. Лексикографически упорядоченная нумерация узлов и ветвей глобального орграфа обусловливает взаимно однозначное соответствие между компонентами вектора P и множеством значений ненулевых элементов основной матрицы СЛАУ, используемой в модели. Для подграфа схемы вариаций компонентами кода $\{n, m, P\}$ будут служить: n – общее число узлов глобального орграфа; m – число варьируемых коэффициентов основной матрицы; P – вектор их вариаций.

С помощью матриц инциденций вариацию основной матрицы для модели по (1) можно определить формулой

$$\widetilde{A} = S_1 D S_2^T, \qquad (3)$$

где $D = diag(P)$.

Если ввести дополнительный m – компонентный вектор v

$$v = D S_2^T X, \qquad (4)$$

то уравнение (1) можно представить следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} A_0 X + S_1 v &= B \\ v &= D S_2^T X \end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Решение системы (5) получим в виде

$$X = \left(I_n - A_0^{-1} S_1 M_v^{-1} D S_2^T\right) X_0, \qquad (6)$$

где $M_v = I_m + D S_2^T A_0^{-1} S_1$; I_m – единичная матрица порядка m.

Выражение (6) представляет собой диакоптику Крона, модифицированную для системы уравнений общего вида. При отыскании решения n -мерной варьируемой модели (1) по формуле (6) порядок обращаемой матрицы M_v равен числу m варьируемых коэффициентов, которое во многих задачах существенно меньше порядка (размерности) n СЛАУ для базовой модели. При этом в вычислительной схеме участвует не полная обратная матрица A_0^{-1} базовой модели, а только часть ее столбцов, соответствующих ненулевым строкам матрицы S_1. Их число равно количеству структурных переменных схемы вариаций. Матричный множитель $A_0^{-1}S_1$ может быть построен на основе матрицы S_1, в которой каждый j-ый столбец с «1» в позиции (i, j) заменяется i-ым столбцом матрицы A_0^{-1}.

Практическая реализация алгоритма (6) построения решения СЛАУ для моделей с варьируемыми коэффициентами СЛАУ осуществляется в виде совокупности следующих матричных процедур (операций):

$$\left.\begin{aligned} M_v Z &= DS_2^T X_0 \\ X^* &= A_0^{-1} S_1 Z \\ X &= X_0 - X^* \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Таким образом, решение в виде вектора X для «варьируемой» модели, описываемой уравнением вида (1), определяется как коррекция решения X_0 базовой СЛАУ. Для определения корректирующего вектора X^* необходимо решить СЛАУ с основной матрицей M_v порядка m. Из выражения (6) также следует, что обратная матрица $\left(A_0 + \widetilde{A}\right)^{-1}$ модифицированной СЛАУ имеет вид

$$\left(A_0 + \widetilde{A}\right)^{-1} = A_0^{-1} - A_0^{-1} S_1 M_v^{-1} DS_2^T A_0^{-1}. \tag{8}$$

Зависимость (8) представляет собой обобщение известного тождества Шермана – Моррисона для обращения матрицы с диадным дополнением.

Если рассматривать расширенное фазовое пространство модели (1), соответствующее координатному вектору $X \oplus v$, то уравнение (1) можно представить в следующей блочно-структурированной форме:

$$\left(\left[\begin{array}{c|c} A_0 & 0_{mn} \\ \hline 0_{mn} & 0_{mm} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} 0_{nn} & S_1 \\ \hline DS_2^T & -I_m \end{array}\right]\right)\left[\begin{array}{c} X \\ \hline v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} B \\ \hline 0_{m1} \end{array}\right], \tag{9}$$

где $0_{nm,}$ $0_{mn,}$ 0_{mm} – «нулевые» матрицы с размерностями соответственно $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$; $V - m$ – компонентный вектор; 0_{m1} – «нулевой» вектор размерностью m.

В уравнении (9) матрица вариаций имеет существенно разреженную упорядоченную структуру так называемого $T_n^{(m)}$-типа [2]. Важным свойством $T_n^{(m)}$-структурированной матрицы вариаций является инвариантность ее формы относительно преобразований основной матрицы базовой СЛАУ. Осуществляя эквивалентное преобразование уравнения (9) с левым неособенным множителем L вида

$$L = \left[\begin{array}{c|c} A_0^{-1} & 0_{nm} \\ \hline -DS_2^T A_0^{-1} & I_m \end{array}\right], \tag{10}$$

представим уравнение (9) следующим образом:

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A_0^{-1}S_1 \\ \hline 0_{mn} & -I_m - DS_2^T A_0^{-1} S_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} X \\ \hline \nu \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} X_0 \\ \hline -DS_2^T A_0^{-1} B \end{array}\right]. \tag{11}$$

Преобразование модели (9) с множителем L объединяет операцию обращения базовой модели и прямую подстановку Гаусса, осуществляемую в основном фазовом пространстве рассматриваемой модели. Обратная подстановка в системе (11) приводит к формуле (6) для решения модифицируемой СЛАУ вида (1).

Преобразование согласно зависимостям (9)–(11) представляет собой интерпретацию обобщенного алгоритма Крона в виде $T_n^{(m)}$-структуризации модифицируемой модели вида (1). Вычислительную эффективность такой структуризации можно оценить ее профильной характеристикой – шириной m окаймления в $T_n^{(m)}$-формате матрицы вариаций. В алгоритме Крона профиль $T_n^{(m)}$-структуры матрицы вариаций определяется числом варьируемых элементов основной матрицы, исследуемой СЛАУ, что непосредственно вытекает из мультипликативной факторизации для матрицы вариаций в виде (3). При этом совершенно не учитываются особенности заполнения матрицы вариаций в каждом конкретном случае. В частности, такие важные характеристики разреженности матрицы $\widetilde{A}$, как локальные группировки элементов этой матрицы в пространстве ее строк и столбцов. Показательной в этом отношении является ситуация, когда матрица вариаций n-мерной СЛАУ состоит из n элементов, принадлежащих одной строке или столбцу. Применение в такой ситуации алгоритма (6) теряет смысл, так как приводит к необходимости обращения матрицы M_ν того же порядка, что и у основной матрицы A_0 базовой модели.

Предлагаемые модификации существующих алгоритмов. Между тем ярко выраженный векторный характер группировки элементов матрицы вариаций в указанных случаях позволяет построить исключительно эффективную вычислительную схему для нахождения решения соответствующей модифицированной модели.

Примем, что в матрице вариаций $\widetilde{A}$ порядка n отличные от нуля элементы сгруппированы в i-ой строке, которую обозначим через R_i. Тогда матрицу вариаций можно представить в диадной форме

$$\widetilde{A} = e_i\, R_i, \tag{12}$$

где e_i – единичный n-компонентный вектор с «1» в i-ой позиции. Такая факторизация матрицы вариаций позволяет осуществить $T_n^{(1)}$-структуризацию модифицируемой СЛАУ с минимальным профилем $(m=1)$ в расширенном $(n+1)$-мерном фазовом пространстве

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A_0^{-1}e_i \\ \hline R_i & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} X \\ \hline \nu \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} X_0 \\ \hline 0 \end{array}\right], \tag{13}$$

где ν – скаляр, так как $m = 1$.

Реализуя алгоритм Гаусса, решение для (13) получим в виде

$$X = X_0 - \frac{R_i\, X_0}{1 + R_i\, h_i}\; h_i. \tag{14}$$

В формуле (14) h_i – это i-ый столбец матрицы A_0^{-1}. Таким образом, в рассматриваемом случае объем вычислений для алгоритма решения модифицированной модели n-го порядка с n варьируемыми элементами, полученного на основе $T_n^{(1)}$-структуризации модели, определяется двумя скалярными произведениями. В вычислительном отношении это на два порядка экономичнее, чем прямое решение нового параметрического варианта исследуемой модели с основной матрицей $A_0+\widetilde{A}$ или решение этого же варианта по алгоритму Крона. Отличительной чертой методов, объединяемых названием «технологии разреженных матриц» (10), является эффективное использование разреженности обрабатываемых матриц с позиций экономии оперативной памяти ЭВМ и/или количества вычислительных операций. Граница между плотными и разреженными матрицами в вычислительных задачах достаточно «нечеткая», поскольку само понятие разреженной матрицы является эвристическим: матрица считается «разреженной», если есть возможность извлечь «вычислительную выгоду» из наличия в ней достаточно большого числа нулевых элементов. Такая возможность, а следовательно, и само определение разреженности матрицы опирается на три взаимосвязанных фактора: структуру заполненности обрабатываемой матрицы; применяемые алгоритмы вычислений; доступность и возможности вычислительных средств.

При наличии достаточно большого числа нулевых коэффициентов в обрабатываемой матрице, т.е. при существенной степени ее разреженности, определяющим фактором для вычислительно эффективного использования этого обстоятельства является упорядоченность структуры заполнения матрицы. Как правило, способы преобразования для обеспечения определенным образом упорядоченной структуры заполнения матриц состоят в перестановке строк и столбцов [10].

Кроме того, такие перестановки могут быть полезны для повышения точности получаемых решений, особенно при ограниченном количестве знаков в мантиссах чисел, применяемых в расчетах.

Если структура заполнения матрицы изначально никак не упорядочена, то найти соответствующие матрицы перестановок очень трудно. Для этой цели приходится привлекать различные методы комбинаторики, теории графов, целочисленного программирования и т.п. Однако вычислительные затраты на предварительное преобразование разреженных матриц вполне окупаются, если сами матрицы имеют большие размеры, а задачи с ними решаются многократно. Известны примеры, когда удачное упорядочение основной матрицы СЛАУ большой размерности позволяло на несколько порядков уменьшить число выполняемых арифметических операций при решении системы и столь же эффективно сократить объем необходимой оперативной памяти [2].

$T_n^{(m)}$-структуризация линейных моделей в расширенном фазовом пространстве представляет собой принципиально новый подход к проблеме использования разреженности обрабатываемых матриц. Главный смысл предлагаемой структуризации заключается не в упорядочении структуры заполнения матрицы, имеющей изначально разреженный характер, а в эквивалентном преобразовании исходной плотно заполненной матрицы в разреженную матрицу с унифицированной структурой заполнения. К сфере целесообразного применения $T_n^{(m)}$-структуризации моделей, описываемых СЛАУ, можно отнести: задачи расчета сложных систем по частям; составные модели систем агрегатно-модульного типа; многовариантные расчеты линейных моделей при структурно-параметрических изменениях исследуемых систем, включая их радикальную реконструкцию за счет расширения или сжатия основного структурного пространства. В задачах такого рода основная матрица представляется суммой двух матриц, одна из которых (стабильная) соответствует некоторой основной (базовой) системе, а вторая (в общем случае варьируемая) – отражает взаимосвязи между различными частями основной системы или изменения (вариации) ее параметров. Во всех названных случаях матричная расчетная модель имеет вид типа (1).

Критерием эффективности $T_n^{(m)}$-структуризации линейной модели служит профильная характеристика *m*. Обеспечение минимального профиля эквивалентной $T_n^{(m)}$-модели осуществляется за счет целенаправленной декомпозиции варьируемой составляющей основной матрицы $\widetilde{A}$ расчетной модели в пространстве ее строк и столбцов. Минимальный профиль определяется минимальным числом кортежей ненулевых элементов, группируемых в пространстве строк и/или столбцов матрицы $\widetilde{A}$. Кортеж элементов, принадлежащих одной строке матрицы $\widetilde{A}$, может быть представлен в диадной форме (12). В эквивалентной модели такому кортежу соответствует одномерный профиль, как это следует из выражения (13). Аналогично можно показать, что кортеж элементов, принадлежащих одному столбцу матрицы $\widetilde{A}$, при $T_n^{(m)}$-структуризации расчетной модели также порождает одномерную профильную составляющую в эквивалентной модели. Действительно, если ненулевые элементы матрицы $\widetilde{A}$ сгруппированы в одном столбце C_j, то эту матрицу можно представить в диадной форме

$$\widetilde{A} = C_j\, e_j^T, \tag{15}$$

а $T_n^{(1)}$ – структурированный образ расчетной модели, то (1) примет следующий блочный вид

$$\left[\begin{array}{c:c} I_n & A_0^{-1} C_j \\ \hdashline e_j^T & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} X \\ \hdashline v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} X_0 \\ \hdashline 0 \end{array}\right]. \tag{16}$$

Решение системы (16) выражается формулой

$$X = X_0 - \frac{x_{0j}}{1 + g_j C_j} A_0^{-1}\, C_j, \tag{17}$$

где x_{0j} – j-ый элемент вектора X_0; g_j – j-ая строка матрицы A_0^{-1}.

В общем случае, когда эффективное использование особенностей структуры заполнения матрицы $\widetilde{A}$ предполагает смешанную группировку ее ненулевых элементов в виде отдельных строк и столбцов, применяется дуальная тактика диадной факторизации матрицы $\widetilde{A}$, базирующаяся на соотношениях вида (12) и (15).

Пусть $\widetilde{R}$, $\widetilde{C}$ – декомпозиционные матрицы вариаций, представляющие собой непересекающиеся совокупности ненулевых ρ строк и q столбцов матрицы $\widetilde{A}$ порядка *n*. Тогда матрицу вариаций $\widetilde{A}$ можно записать в следующей аддитивной форме:

$$\widetilde{A} = E_R \widetilde{R} + \widetilde{C} E_C^T, \tag{18}$$

где E_R и E_C – матрицы с размерностями $n \times p$ и $n \times q$, составленные из единичных векторов, отвечающих глобальным номерам (в основном фазовом пространстве расчетной модели) соответственно строк матрицы $\widetilde{R}$ и столбцов матрицы $\widetilde{C}$. В рассматриваемом общем случае $T_n^{(m)}$-структурированную модель с профилем $m = p + q$ расчетной системы вида (1) можно представить следующим образом:

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A_0^{-1}V \\ \hline H & -I_m \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} X \\ \hline \nu \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} X_0 \\ \hline 0_{m1} \end{array}\right], \qquad (19)$$

где $\nu-(p+q)$ – компонентный вектор дополнительных переменных; H, V – блочные матрицы вида

$$H=\left[\begin{array}{c} \widetilde{R} \\ \hline E_C^T \end{array}\right]; \quad V=\left[\begin{array}{c|c} E_R & \widetilde{C} \end{array}\right]. \qquad (20)$$

Выполняя прямую подстановку алгоритма (метода) Гаусса в пределах основного фазового пространства расчетной модели, получим решение системы (19)

$$X=\left[I_n-A_0^{-1}V\left(I_m-HA_0^{-1}V\right)\right]^{-1}HX_0. \qquad (21)$$

Построение по формуле (21) решения варьируемой модели с локально плотной матрицей вариаций $\widetilde{A}$, содержащей в общем случае $p(n-q)+qn$ элементов, потребует решения вспомогательной СЛАУ порядка $(p+q)<n$. Преобразование по алгоритму Крона в этом случае совершенно теряет смысл, так как приводит к необходимости решать СЛАУ порядка $p(n-q)+qn$, который при $(p+q)>1$ существенно превышает порядок исходной СЛАУ.

При $T_n^{(m)}$-структуризации линейной модели (1) на основе аддитивно-диадной факторизации матрицы вариаций в виде (18) минимизация профиля m эквивалентной модели достигается за счет последовательного выбора из матрицы $\widetilde{A}$ ее строки или столбца с наиболее длинным на текущем шаге кортежем ненулевых элементов. Выбираемые строки и столбцы помещаются в соответствующую декомпозиционную матрицу вариаций $\widetilde{R}$ или $\widetilde{C}$. В общем случае одна из этих матриц может оказаться пустой.

Схема минимизации профиля $T_n^{(m)}$-структурированного пространства расчетной модели (1) может быть рационально реализована с использованием сжатых матриц инциденций $S_{1r,}$ S_{2r}. В матрицах этого вида участвуют только опорные узлы (структурные переменные) схемы вариаций: r_1 заходящих и r_2 исходящих узлов. На основе сжатых матриц инциденций для (r_1+r_2)-узловой схемы вариаций можно построить сжатую $r_1\times r_2$-матрицу вариаций $\widetilde{A}_r$ в форме, аналогичной выражению (3)

$$\widetilde{A}_r = S_{1r}\, D\, S_{2r}^T\ . \qquad (22)$$

Глобальная матрица вариаций $\widetilde{A}$ порядка n может быть реконструирована на основе сжатой матрицы вариаций, если последняя сопровождается двумя лексикографически упорядоченными номерными кортежами N_{1r}, N_{2r}, содержащими соответственно r_1 и r_2 элементов. Элементами этих кортежей служат глобальные (в основном структурном пространстве расчетной модели) номера узлов подграфа схемы вариаций, инцидентных соответственно заходящим и исходящим ветвям. Глобальная матрица вариаций может быть получена как расширение сжатой матрицы вариаций за счет последовательного формирования у последней $n-r_1$ нулевых строк с номерами из множества N_1 и $n-r_2$ нулевых столбцов с номерами из множества N_2:

$$N_1 = N \setminus N_{1r}\,; \quad N_2 = N \setminus N_{2r}\,; \quad N = (1,\ldots,n), \tag{23}$$

где символ «\» обозначает разность множеств.

Декомпозиция матрицы вариаций в пространстве ее строк и столбцов по предложенной выше схеме последовательного выбора строк и столбцов с наиболее длинными на текущем шаге кортежами ненулевых элементов первоначально осуществляется на основе сжатой матрицы вариаций $\widetilde{A}_r$. В результате, в $p \times q$ -подпространстве матрицы $\widetilde{A}_r$ формируются сжатые декомпозиционные матрицы вариаций $\widetilde{R},\ \widetilde{C},$ с размерами соответственно $p \times r_2$. и $r_1 \times q$. Полные декомпозиционные матрицы вариаций $\widetilde{R},\ \widetilde{C},$ отвечающие основному фазовому пространству расчетной модели, реконструируются на основе своих сжатых образов $\widetilde{R},\ \widetilde{C},$ за счет последовательного формирования: $n - r_2$ нулевых столбцов с номерами из множества N_2 – у матрицы $\widetilde{R}_r$; $n - r_1$ нулевых строк с номерами из множества N_1 – у матрицы $\widetilde{C}_r$.

В качестве элементарного *иллюстративного примера* использования предложенных зависимостей (алгоритмов) рассмотрим леонтьевскую балансовую модель «затраты-выпуск» для условной десятиотраслевой производственно-экономической системы. Технологическую матрицу A системы и вектор B конечной продукции примем в виде

$$A=\begin{bmatrix}
0.0132 & 0.0227 & 0.0423 & 0.0232 & 0.0140 & 0.0332 & 0.0275 & 0.0651 & 0.0422 & 0.0827 \\
0.0225 & 0.0305 & 0.0571 & 0.0721 & 0.0117 & 0.0653 & 0.0820 & 0.0129 & 0.0351 & 0.0425 \\
0.0343 & 0.0173 & 0.0413 & 0.0637 & 0.0885 & 0.0231 & 0.0497 & 0.0147 & 0.0829 & 0.0665 \\
0.0453 & 0.0235 & 0.0180 & 0.0382 & 0.0116 & 0.0281 & 0.0479 & 0.0836 & 0.0373 & 0.0426 \\
0.0216 & 0.0565 & 0.0146 & 0.0456 & 0.0732 & 0.0847 & 0.0429 & 0.1203 & 0.0338 & 0.0503 \\
0.0132 & 0.0427 & 0.0623 & 0.0362 & 0.0140 & 0.0732 & 0.0675 & 0.0851 & 0.0222 & 0.0127 \\
0.0325 & 0.0705 & 0.0471 & 0.0221 & 0.0117 & 0.0553 & 0.0910 & 0.1329 & 0.0654 & 0.0225 \\
0.0143 & 0.0273 & 0.0833 & 0.0437 & 0.0265 & 0.0131 & 0.0897 & 0.0647 & 0.0429 & 0.0165 \\
0.0253 & 0.0033 & 0.0851 & 0.0662 & 0.0436 & 0.0181 & 0.0911 & 0.0481 & 0.0233 & 0.0173 \\
0.0226 & 0.0345 & 0.0846 & 0.0256 & 0.0132 & 0.0457 & 0.0729 & 0.0343 & 0.0438 & 0.0963
\end{bmatrix}.$$

$$B = (\ 2.73 \quad 3.38 \quad 3.45 \quad 2.47 \quad 3.49 \quad 3.06 \quad 3.75 \quad 3.21 \quad 3.27 \quad 4.04)^T.$$

Для матрицы Леонтьева $L_m = I - A$ и оператора Леонтьева $L_0 = (I - A)^{-1}$ получены следующие выражения:

$$L_m=\begin{bmatrix}
0.9868 & -0.0227 & -0.0423 & -0.0232 & -0.0140 & -0.0332 & -0.0275 & -0.0651 & -0.0422 & -0.0827 \\
-0.0225 & 0.9695 & -0.0571 & -0.0721 & -0.0117 & -0.0653 & -0.0820 & -0.0129 & -0.0351 & -0.0425 \\
-0.0343 & -0.0173 & 0.9587 & -0.0637 & -0.0885 & -0.0231 & -0.0497 & -0.0147 & -0.0829 & -0.0665 \\
-0.0453 & -0.0235 & -0.0180 & 0.9618 & -0.0116 & -0.0281 & -0.0479 & -0.0836 & -0.0373 & -0.0426 \\
-0.0216 & -0.0565 & -0.0146 & -0.0456 & 0.9268 & -0.0847 & -0.0429 & -0.1203 & -0.0338 & -0.0503 \\
-0.0132 & -0.0427 & -0.0623 & -0.0362 & -0.0140 & 0.9268 & -0.0675 & -0.0851 & -0.0222 & -0.0127 \\
-0.0325 & -0.0705 & -0.0471 & -0.0221 & -0.0117 & -0.0553 & 0.9090 & -0.1329 & -0.0654 & -0.0225 \\
-0.0143 & -0.0273 & -0.0833 & -0.0437 & -0.0265 & -0.0131 & -0.0897 & 0.9353 & -0.0429 & -0.0165 \\
-0.0253 & -0.0033 & -0.0851 & -0.0662 & -0.0436 & -0.0181 & -0.0911 & -0.0481 & 0.9767 & -0.0173 \\
-0.0226 & -0.0345 & -0.0846 & -0.0256 & -0.0132 & -0.0457 & -0.0729 & -0.0343 & -0.0438 & 0.9037
\end{bmatrix},$$

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1.0297 & 0.0442 & 0.0828 & 0.0521 & 0.0346 & 0.0598 & 0.0753 & 0.1067 & 0.0724 & 0.1128 \\ 0.0435 & 1.0580 & 0.0995 & 0.1054 & 0.0344 & 0.0991 & 0.1366 & 0.0679 & 0.0713 & 0.0753 \\ 0.0573 & 0.0472 & 1.0884 & 0.1022 & 0.1184 & 0.0617 & 0.1094 & 0.0774 & 0.1214 & 0.1063 \\ 0.0618 & 0.0459 & 0.0577 & 1.0666 & 0.0303 & 0.0544 & 0.0961 & 0.1297 & 0.0675 & 0.0708 \\ 0.0449 & 0.0914 & 0.0708 & 0.0885 & 1.1023 & 0.1285 & 0.1132 & 0.1901 & 0.0756 & 0.0887 \\ 0.0327 & 0.0699 & 0.1064 & 0.0708 & 0.0380 & 1.1059 & 0.1237 & 0.1389 & 0.0584 & 0.0418 \\ 0.0568 & 0.1043 & 0.1066 & 0.0669 & 0.0411 & 0.0953 & 1.1653 & 0.2005 & 0.1109 & 0.0595 \\ 0.0351 & 0.0540 & 0.1256 & 0.0784 & 0.0532 & 0.0438 & 0.1450 & 1.1187 & 0.0809 & 0.0479 \\ 0.0464 & 0.0308 & 0.1249 & 0.0994 & 0.0705 & 0.0497 & 0.1440 & 0.1050 & 1.0614 & 0.0500 \\ 0.0450 & 0.0640 & 0.1352 & 0.0632 & 0.0409 & 0.0822 & 0.1345 & 0.0897 & 0.0853 & 1.1367 \end{bmatrix}.$$

Вектор X_0 валовой продукции условных отраслей, обеспечивающий равновесное функционирование рассматриваемой системы получен в виде

$$X_0 = L_0 B = (\ 4.9963 \quad 5.9898 \quad 6.4103 \quad 4.7135 \quad 6.7748 \quad 5.6533 \quad 7.0921 \quad 5.8181 \quad 5.8549 \quad 7.0193)^T.$$

Один из вариантов глобального управления системой рассматриваемого вида связан с прогнозированием необходимой для поддержания равновесия системы коррекции вектора валовой продукции X_0 при технологической модернизации отдельных отраслей. На модельном уровне указанная модернизация приводит к изменению значений коэффициентов технологической матрицы системы, принадлежащих строке и столбцу матрицы, соответствующих модернизируемой условной отрасли. Причем возможные изменения в общем случае имеют многовариантный характер как в отношении модернизируемых отраслей, так и в отношении вариаций отдельных технологических коэффициентов.

В такой ситуации повторяемый расчетный блок предполагает определение равновесного вектора X_{var} валовых выпусков условных отраслей при одновременной вариации коэффициентов какой-либо строки технологической матрицы системы и одноименного столбца. Это соответствует рассмотренному в статье случаю векторной группировки варьируемых коэффициентов.

Предположим, что варьируются коэффициенты третьей строки и третьего столбца технологической матрицы анализируемой системы, и рассмотрим один шаг в общем случае многовариантного процесса. Пусть на данном шаге вектор-строка $\widetilde{R}_3$ вариаций коэффициентов третьей строки технологической матрицы A и вектор-столбец $\widetilde{C}_3$ вариаций коэффициентов третьего столбца этой матрицы имеют вид

$$\widetilde{R}_3 = -(0.0137 \quad 0.0069 \quad 0.0165 \quad 0.0255 \quad 0.0354 \quad 0.0092 \quad 0.0199 \quad 0.0059 \quad 0.0332 \quad 0.0266);$$

$$\widetilde{C}_3 = -(0.0190 \quad 0.0257 \quad 0.0186 \quad 0.0081 \quad 0.0066 \quad 0.0280 \quad 0.0212 \quad 0.0375 \quad 0.0383 \quad 0.0381)^T.$$

Следуя общей зависимости (21), определим значение X_{var} по формуле

$$X_{\text{var}} = \left(I - L_0 V S^{-1} H\right) X_0 =$$

$$= (\ 4.7183 \quad 5.6559 \quad 5.0108 \quad 4.5197 \quad 6.5369 \quad 5.2961 \quad 6.7343 \quad 5.3963 \quad 5.4357 \quad 6.5653)^T.$$

Участвующие в этой формуле матричные компоненты в соответствии с выражениями (20) получены в виде

$$H = \begin{bmatrix} 0.0137 & 0.0069 & 0.0165 & 0.0255 & 0.0354 & 0.0092 & 0.0199 & 0.0059 & 0.0332 & 0.0266 \\ 0 & 0 & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0190 & 0.0257 & 0.0186 & 0.0081 & 0.0066 & 0.0280 & 0.0212 & 0.0375 & 0.0383 & 0.0381 \end{bmatrix}^T,$$

$$S = E_2 + \mathrm{H}\,\mathrm{L}_0 \mathrm{V} = \begin{bmatrix} 1.0354 & 0.0085 \\ 1.0884 & 1.0398 \end{bmatrix}.$$

При вычислении вектора X_{var} потребовалась операция обращения лишь матрицы S второго порядка.

Прямой метод расчета вектора X_{var} потребует построения нового оператора Леонтьева L_0^*, что будет связано с необходимостью обращения новой матрицы Леонтьева десятого порядка

$$L_0^* = (L_m^*)^{-1} = \left[I - \left(A - VH\right)\right]^{-1}.$$

Матрицу L_m^* и оператор L_0^* Леонтьева новой системы можно получить в виде

$$L_m^* = \begin{bmatrix} 0.9868 & -0.0227 & -0.0233 & -0.0232 & -0.0140 & -0.0332 & -0.0275 & -0.0651 & -0.0422 & -0.0827 \\ -0.0225 & 0.9695 & -0.0314 & -0.0721 & -0.0117 & -0.0653 & -0.0820 & -0.0129 & -0.0351 & -0.0425 \\ -0.0206 & -0.0104 & 0.9938 & -0.0382 & -0.0531 & -0.0139 & -0.0298 & -0.0088 & -0.0497 & -0.0399 \\ -0.0453 & -0.0235 & -0.0099 & 0.9618 & -0.0116 & -0.0281 & -0.0479 & -0.0836 & -0.0373 & -0.0426 \\ -0.0216 & -0.0565 & -0.0080 & -0.0456 & 0.9268 & -0.0847 & -0.0429 & -0.1203 & -0.0338 & -0.0503 \\ -0.0132 & -0.0427 & -0.0343 & -0.0362 & -0.0140 & 0.9268 & -0.0675 & -0.0851 & -0.0222 & -0.0127 \\ -0.0325 & -0.0705 & -0.0259 & -0.0221 & -0.0117 & -0.0553 & 0.9090 & -0.1329 & -0.0654 & -0.0225 \\ -0.0143 & -0.0273 & -0.0458 & -0.0437 & -0.0265 & -0.0131 & -0.0897 & 0.9353 & -0.0429 & -0.0165 \\ -0.0253 & -0.0033 & -0.0468 & -0.0662 & -0.0436 & -0.0181 & -0.0911 & -0.0481 & 0.9767 & -0.0173 \\ -0.0226 & -0.0345 & -0.0465 & -0.0256 & -0.0132 & -0.0457 & -0.0729 & -0.0343 & -0.0438 & 0.9037 \end{bmatrix},$$

$$L_0^* = \begin{bmatrix} 1.0267 & 0.0418 & 0.0427 & 0.0467 & 0.0284 & 0.0565 & 0.0696 & 0.1026 & 0.0661 & 0.1072 \\ 0.0399 & 1.0550 & 0.0513 & 0.0990 & 0.0269 & 0.0953 & 0.1297 & 0.0630 & 0.0637 & 0.0686 \\ 0.0322 & 0.0265 & 1.0198 & 0.0574 & 0.0666 & 0.0347 & 0.0615 & 0.0435 & 0.0683 & 0.0598 \\ 0.0597 & 0.0442 & 0.0297 & 1.0628 & 0.0260 & 0.0521 & 0.0921 & 0.1269 & 0.0631 & 0.0670 \\ 0.0423 & 0.0892 & 0.0365 & 0.0839 & 1.0970 & 0.1258 & 0.1082 & 0.1866 & 0.0701 & 0.0839 \\ 0.0288 & 0.0667 & 0.0548 & 0.0639 & 0.0300 & 1.1017 & 0.1163 & 0.1336 & 0.0502 & 0.0347 \\ 0.0529 & 0.1011 & 0.0549 & 0.0600 & 0.0331 & 0.0911 & 1.1579 & 0.1952 & 0.1027 & 0.0523 \\ 0.0305 & 0.0503 & 0.0647 & 0.0702 & 0.0437 & 0.0389 & 0.1363 & 1.1125 & 0.0713 & 0.0394 \\ 0.0419 & 0.0270 & 0.0643 & 0.0913 & 0.0611 & 0.0448 & 0.1353 & 0.0988 & 1.0518 & 0.0416 \\ 0.0401 & 0.0600 & 0.0697 & 0.0544 & 0.0307 & 0.0769 & 0.1251 & 0.0831 & 0.0749 & 1.1275 \end{bmatrix}.$$

Значение вектора X_{var}, полученное прямым методом,

$$X_{\text{var}} = L_0^* B == \begin{pmatrix} 4.7183 & 5.6559 & 5.0108 & 4.5197 & 6.5369 & 5.2961 & 6.7343 & 5.3963 & 5.4357 & 6.5653 \end{pmatrix}^T$$

подтверждает результат вычислений по компактной схеме.

Для большой системы порядка n в аналогичной расчетной ситуации определение вектора X_{var} по формуле (21) будет связано с обращением матрицы также второго порядка. Прямой же метод расчета потребует обращения матрицы порядка n.

Выводы.

1. В статье предложен способ структуризации СЛАУ с варьируемыми коэффициентами, обеспечивающий разреженный характер обрабатываемых матриц и, как следствие, существенное повышение вычислительной эффективности расчетных алгоритмов по сравнению с прямыми методами расчета СЛАУ большой размерности.

2. Практически важной особенностью выполняемой структуризации является минимальная профильная характеристика (количество кортежей варьируемых коэффициентов) разреженности обрабатываемых матриц при векторных вариациях коэффициентов уравнений. Это радикально отличает предложенный метод от известного диакоптического алгоритма Крона, в котором величина профиля получаемой разреженности расчетной матрицы определяется количеством одновременно варьируемых параметров.

3. Для сложных схем вариации коэффициентов уравнений предложен декомпозиционный подход, использующий сжатые матрицы вариаций коэффициентов и обеспечивающий минимизацию профиля $T_n^{(m)}$-структурированного пространства разреженной расчетной системы.

Список литературы

1. Блатов И. А. Численные методы для разреженных матриц / И. А. Блатов, Е. В. Китаева. – Самара : Самарский гос. университет, 2010.

2. Брумштейн Ю. М. Использование псеводогидродинамической постановки в задачах фильтрации со свободной поверхностью / Ю. М. Брумштейн // Естественные науки. – 2004. – № 8. – С. 125–128.

3. Бутюгин Д. С. Методы параллельного решения СЛАУ на системах с распределенной памятью в библиотеке Krylov / Д. С. Бутюгин, В. П. Ильин, Д. В. Перевозкин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. – 2012. – № 47 (306). – С. 22–36.

4. Джордж А. Численное решение больших разреженных систем уравнений / А. Джордж, Дж. Лю. – Москва : Мир, 1984. – 333 с.

5. Игнатьев А. В. Анализ эффективности методов решения больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений / А. В. Игнатьев, В. Н. Ромашкин // Интернет-Вестник ВолгГАСУ. – 2008. – № 3 (6). – С. 5.

6. Ильин В. П. Проблемы высокопроизводительных технологий решения больших разреженных СЛАУ / В. П. Ильин // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2009. – Т. 10, № 1. – С. 141–147.

7. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика : пер. с англ. / Г. Крон. – Москва : Наука, 1972.

8. Кочура А. Е. Декомпозиция и технология разреженных матриц в современных вычислительных проблемах / А. Е. Кочура // Математика в вузе : тр. Междунар. науч.-метод. конф. – Псков, 1997.

9. Солнцева М. О. Применение методов кластеризации узлов на графах с разреженными матрицами смежности в задачах логистики / М. О. Солнцева, Б. Г. Кухаренко // Труды Московского физико-технического института. – 2013. – Т. 5, № 3 (19). – С. 75–83.

10. Писсанецки С. Технология разреженных матриц : пер. с англ. / С. Писсанецки. – Москва : Мир, 1988.

11. Уилкинсон Дж. Х. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра / Дж. Х. Уилкинсон, С. Райнш. – Москва : Машиностроение, 1976. – 390 с.

12. Эварт Т. Е. Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами / Т. Е. Эварт, А. Б. Лазарева // Приволжский научный вестник. – 2013. – № 12–2 (28). – С. 91–92.

13. Юлдашев А. В. Сравнительное исследование эффективности ряда библиотек, реализующих алгоритмы решения разреженных матриц / А. В. Юлдашев, М. З. Гатиятуллин // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. – 2012. – № 4 (22). – С. 130–134.

14. Alaghband G. Parallel sparse matrix solution and performance / G. Alaghband // Parallel Computing. – 1995. – Vol. 21, № 9. – P. 1407–1430.

15. Borutzky Wolfgang. Bond Graph Methodology: Development and Analysis of Multidisciplinary Dynamic System Models / Borutzky Wolfgang. – Springer, 2009. – 662 p.

16. Dehnavi M. M. Finite-element sparse matrix vector multiplication on graphic processing units / M. M. Dehnavi, D. M. Fernández, D. Giannacopoulos // IEEE Transactions on Magnetics. – 2010. – T. 46, № 8. – C. 2982–2985.

17. Saad Yousef. Iterative methods for sparse linear systems / Saad Yousef. – SIAM, 2003. – 528 p.

18. Sasaoka T. A matlab-based code generator for parallel sparse matrix computations utilizing PSBLAS / T. Sasaoka, H. Kawabata, T. Kitamura // IEICE Transactions on Information and Systems. – 2007. – T. E90-D, № 1. – P. 2.

19. Timothy A. Davis. The university of Florida sparse matrix collection ACM / Timothy A. Davis, Yifan Hu // Transactions on Mathematical Software (TOMS). – 2011. – Vol. 38, issue 1, November.

20. Timothy A. Davis. Direct Methods for Sparse Linear Systems / Timothy A. Davis. – SIAM, 2006. – 217 p.

21. Tran T. M. A direct parallel sparse matrix solver / T. M. Tran, R. Gruber, K. Appert, S. Wuthrich // Computer Physics Communications. – 1996. – Vol. 96, № 2–3. –P. 118–128.

References

1. Blatov I. A., Kitaeva Ye. V. *Chislennye metody dlya razrezhennykh matrits* [Numerical methods for sparse matrices]. Samara, Samara State University Publ., 2010.

2. Brumshteyn Yu. M. Ispolzovanie psevodogidrodinamicheskoy postanovki v zadachakh filtratsii so svobodnoy poverkhnostyu [Use of pseudohydrodinamic posing in filtration problems with a free surface]. *Yestestvennye nauki* [Natural Sciences], 2004, no. 8, pp. 125–128.

3. Butyugin D. S., Ilin V. P., Perevozkin D. V. Metody parallelnogo resheniya SLAU na sistemakh s raspredelennoy pamyatyu v biblioteke Krylov [Parallel methods for solving the systems of linear equations on the systems with distributed memory in Krylov library]. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Vychislitelnaya matematika i informatika* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational mathematics and computer science], 2012, no. 47 (306), pp. 22–36.

4. Dzhordzh A., Lyu Dzh. *Chislennoe reshenie bolshikh razrezhennykh sistem uravneniy* [Numerical solution of large sparse systems of equations]. Moscow, Mir, 1984. 333 p.

5. Ignatev A. V., Romashkin V. N. Analiz effektivnosti metodov resheniya bolshikh razrezhennykh sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy [Analysis of the effiecency of methods for solving large sparse systems of linear algebraic equations]. *Internet-Vestnik VolgGASU* [Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering], 2008, no. 3 (6), pp. 5.

6. Ilin V. P. Problemy vysokoproizvoditelnykh tekhnologiy resheniya bolshikh razrezhennykh SLAU [Problems of high production technologies for solving large sparse systems of linear algebraic equations]. *Vychislitelnye metody i programmirovanie: novye vychislitelnye tekhnologii* [Computational Methods and Programming: New Computing Technologies], 2009, vol. 10, no. 1, pp. 141–147.

7. Kron G. *Issledovanie slozhnykh sistem po chastyam – diakoptika* [The study of complex systems in parts – diakoptics]. Moscow, Nauka, 1972.

8. Kochura A. Ye. Dekompozitsiya i tekhnologiya razrezhennykh matrits v sovremennykh vychislitelnykh problemakh [Decomposition and sparse matrix technology in modern computing problems]. *Matematika v vuze: trudy Mezhdunarodnoy nauchno-metodicheskoy konferentsii* [Math in high school: Proceedings of the International Scientific-Methodical Conference]. Pskov, 1997.

9. Solntseva M. O., Kukharenko B. G. Primenenie metodov klasterizatsii uzlov na grafakh s razrezhennymi matritsami smezhnosti v zadachakh logistiki [Application of clustering nodes on graphs with sparse adjacency matrices in problems of logistics]. *Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo institute* [Proceedings of Moscow Physical-Technical Institute], 2013, vol. 5, no. 3 (19), pp. 75–83.

10. Pissanetski S. *Tekhnologiya razrezhennykh matrits* [Sparse matrix technology]. Moscow, Mir, 1988.

11. Uilkinson Dzh. Kh., Raynsh S. *Spravochnik algoritmov na yazyke Algol. Lineynaya algebra* [Directory of algorithms in Algol. Linear algebra]. Moscow, Mashinostroenie, 1976. 390 p.

12. Evart T. Ye., Lazareva A. B. Algoritm resheniya sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy s razrezhennymi matritsami [Algorithm for solving systems of linear algebraic equations with sparse matrices]. *Privolzhskiy nauchnyy vestnik* [Volga Scientific Bulletin], 2013, no. 12–2 (28), pp. 91–92.

13. Yuldashev A. V., Gatiyatullin M. Z. Sravnitelnoe issledovanie effektivnosti ryada bibliotek, realizuyushchikh algoritmy resheniya razrezhennykh matrits [Comparative research of efficiency of a number of libraries implementing algorithms for solving sparse matrices]. *Vektor nauki Tolyattinskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vector of Science of Tolyatti State University], 2012, no. 4 (22), pp. 130–134.

14. Alaghband G. Parallel sparse matrix solution and performance. *Parallel Computing*, 1995, vol. 21, no. 9, pp. 1407–1430.

15. Borutzky Wolfgang. *Bond Graph Methodology: Development and Analysis of Multidis-ciplinary Dynamic System Models*. Springer, 2009. 662 p.

16. Dehnavi M. M., Fernández D. M., Giannacopoulos D. Finite-element sparse matrix vector multiplication on graphic processing units. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2010, vol. 46, no. 8, pp. 2982–2985.

17. Saad Yousef. *Iterative methods for sparse linear systems*. SIAM, 2003. 528 p.

18. Sasaoka T., Kawabata H., Kitamura T. A matlab-based code generator for parallel sparse matrix computations utilizing PSBLAS. *IEICE Transactions on Information and Systems*, 2007, vol. E90-D, no. 1, p. 2.

19. Timothy A. Davis, Yifan Hu. The university of Florida sparse matrix collection ACM. *Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 2011, vol. 38, issue 1, November.

20. Timothy A. Davis. *Direct Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, 2006. 217 p.

21. Tran T. M., Gruber R., Appert K., Wuthrich S. A direct parallel sparse matrix solver. *Computer Physics Communications*, 1996, vol. 96, no. 2–3, pp. 118–128.

УДК 004.65

ИНФОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЗ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Статья поступила в редакцию 27.02.2014, в окончательном варианте 05.03.2014.

Брейман Александр Давидович, кандидат технических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 101000, Российская Федерация, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, e-mail: abreyman@hse.ru

В статье рассмотрено содержание процесса инфологического проектирования баз данных с использованием диаграммы «сущность – связь» в рамках идеологии кинематического подхода. Применительно к моделированию данных он состоит в использовании пространственно-временных характеристик (координат) объектов в качестве глобально уникальных идентификаторов; отражении движения и взаимодействия объектов предметной области в виде последовательностей их пространственно-временных координат. Рассмотрены ограничения возможностей использования диаграмм «сущность – связь» при моделировании пространственно-временных данных, способы преодоления этих ограничений. Автором статьи проанализированы возможности учета периодичности исследуемых процессов. Показана применимость кинематического подхода к моделированию объектов различной природы (как физических, так и информационных), обладающих разными кинематическими характеристиками (статические, квазистатические и динамические объекты). В качестве примеров использования кинематического подхода исследованы описания сущностей и связей в вузовской и корпоративной информационных системах.

Ключевые слова: инфологическое проектирование баз данных, информационные объекты, жизненный цикл информационных объектов, условия взаимодействия объектов, диаграмма «сущность – связь», кинематическое представление объектов, пространственно-временная траектория объекта, кинематическая картина предметной области