
СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ, УПРАВЛЕНИЕ В ЧЕТКИХ И НЕЧЕТКИХ УСЛОВИЯХ

УДК 51-77

ПЛОТНОСТИ АРХИМЕДОВЫХ КОПУЛ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КУРСОВ ВАЛЮТ

Статья поступила в редакцию 28.01.2014, в окончательном варианте 01.03.2014.

Ахунжанов Ренат Камильевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Астраханский государственный университет, 414056, Российская Федерация, г. Астрахань, ул. Татищева, 20а, e-mail: akhunzha@mail.ru

Кангина Наталья Николаевна, ассистент, Астраханский государственный университет, 414056, Российская Федерация, г. Астрахань, ул. Татищева, 20а, e-mail: kangina.natali@yandex.ru

Князев Александр Геннадьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Астраханский государственный университет, 414056, Российская Федерация, г. Астрахань, ул. Татищева, 20а, e-mail: agkniazev@mail.ru

Лепёхин Олег Алексеевич, кандидат экономических наук, доцент, Астраханский государственный университет, 414056, Российская Федерация, г. Астрахань, ул. Татищева, 20а, e-mail: okmb07@yandex.ru

Копулярные модели зависимости играют важную роль в прикладных статистических исследованиях. Для оценки параметров таких моделей необходимо явное описание плотностей копул. В данной работе авторами получены формулы для плотностей копул Клейтона и Франка в явном виде, а также рекуррентные формулы для копулы Гамбела-Хаугарда. Рассмотрены некоторые экстремальные свойства этих плотностей. Указанные копулы относятся к классу архимедовых копул, которые востребованы в прикладных исследованиях фондового рынка, динамики валютных курсов, кредитных портфелей банков. В данной статье обсуждаются также некоторые практические аспекты применения плотностей архимедовых копул в рамках задач прогнозирования валютного курса рубля по отношению к ряду иностранных валют (канадский доллар, британский фунт, японская иена, американский доллар, евро). Результаты имитационного моделирования с использованием предложенных авторами формул показали, что наибольшей прогностической силой обладает копула Франка.

Ключевые слова: архимедовы копулы, копула Клейтона, копула Франка, копула Гамбела-Хаугарда, плотности, последовательности, рекуррентные формулы, имитационное моделирование, прогноз, ошибка прогноза, управление валютными рисками

THE DENSITY OF ARCHIMEDEAN COPULAS AND THEIR APPLICATION FOR CURRENCY RATE FORECASTING

Akhunzhanov Renat K., Ph.D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Astrakhan State University, 20a Tatishchev St., Astrakhan, 414056, Russian Federation, e-mail: akhunzha@mail.ru

Kangina Natalya N., Assistant, Astrakhan State University, 20a Tatishchev St., Astrakhan, 414056, Russian Federation, e-mail: kangina.natali@yandex.ru

Knyazev Aleksandr G., Ph.D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Astrakhan State University, 20a Tatishchev St., Astrakhan, 414056, Russian Federation, e-mail: agkniyazev@mail.ru

Lepekhin Oleg A., Ph.D. (Economics), Associate Professor, Astrakhan State University, 20a Tatishchev St., Astrakhan, 414056, Russian Federation, e-mail: okmb07@yandex.ru

Copula modules of dependence have an important role in applied statistics investigations. For evaluation of the parameters of such models it is necessary to make a definite description of copulas density. This paper observes the definite formulas for density of Kleiton and Franks copulas, and also some recurrent formulas for Gambel-Haugard copulas. The paper refers to some extremal properties of Archimedean copulas density. The copulas refer to the Archimedean copulas which is in demand in applied investigations of the stock market, of the foreign exchange movement, advances portfolio. The paper discusses the practical aspects of implementation of Archimedean copulas density in the frame of the task of forecasting of the currency rate on the example of some foreign currencies (Canadian dollar, British pound, Japanese yen, American dollar, Euro). The results of the imitational modeling showed, that the most forecasting power has the Frank's copula.

Keywords: Archimedean copulas, Clayton copula, Frank copula, Gambel-Haugard copula, density, sequences, recurrent formulas, simulation modeling, forecast, forecasting error, foreign exchange risk management

Многие задачи принятия решений в сфере финансовой деятельности, управления различными объектами и пр. опираются на прогнозы показателей, которые могут быть получены различными методами. В данной статье рассматриваются подходы к прогнозированию на основе копулярных функций, которые занимают важное место в прикладных статистических исследованиях. Целью данной работы была дальнейшая разработка некоторых теоретических вопросов, связанных с копулярными функциями, и апробация полученных методов на задаче прогноза курса рубля по отношению к нескольким иностранным валютам.

Введение в проблематику статьи. Роль копулярных функций в статистике определяется теоремой Склера, в соответствии с которой копулы можно использовать для записи моделей многомерных распределений. Применение копул позволяет выделить из функции совместного распределения ту ее часть, которая отвечает за описание зависимости между переменными. Особенно популярными в последние годы стали архимедовы копулы. В качестве примеров использования копул в прикладных финансовых исследованиях можно указать работы Паттона [11], Анэ [6], Гордеева [9], монографию Черубини [8] и множество других. Изложению общей теории копул посвящена монография Нельсена [10].

Для практических применений необходима оценка параметров копулярных моделей. Большинство методов статистического оценивания параметров используют функцию плотности совместного распределения. Прежде всего – это метод максимального правдоподобия, а также байесовские процедуры оценивания. Соответственно появляется задача вычисления плотностей копулярных функций, описания их свойств. Возникающие здесь трудности резко возрастают при увеличении размерности случайной величины. Первые результаты в отношении плотностей архимедовых копул приведены в [8], однако они далеки от полноты и местами не вполне точны. В работе Бу [13] приведены рекуррентные формулы для плотностей копул Франка.

Настоящая статья призвана дополнить существующие исследования в области теории копул. В частности, выведены формулы для плотностей копул Клейтона и Франка в явной форме, а также рекуррентные формулы для копулы Гамбела-Хаугарда. Впервые получены явные формулы коэффициентов характеристических многочленов плотности копулы Франка. Во всех случаях приведены оригинальные доказательства авторов. В статье рас-

смотрены также некоторые экстремальные свойства плотностей архимедовых копул, получено наибольшее значение плотности копулы Клейтона. Эти результаты необходимы для имитационного моделирования выборок из совместных распределений – задачи, которая часто возникает при управлении валютными и финансовыми рисками.

Рассмотренные методы в данной работе апробируются на задаче прогнозирования курсов пяти иностранных валют по отношению к рублю.

Элементы теории копул: определение копула-функции и теорема Склера. Пусть $I = [0; 1]^n$, $0 \leq a_k \leq b_k \leq 1, k = 1, \dots, n$, $B = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$. Пусть $G(u_1, \dots, u_n)$ – отображение I^n в I . Назовем « G – объемом» множества « B » следующее число:

$$V_H(B) = \Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} G(u_1, \dots, u_n),$$

где $\Delta_{a_k}^{b_k} G(u_1, \dots, u_n) = G(u_1, \dots, u_{k-1}, b_k, u_{k+1}, \dots, u_n) - G(u_1, \dots, u_{k-1}, a_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$.

Отображение $C(u_1, \dots, u_n)$ из I^n в I называется n -мерной копулой, если выполнены следующие условия [10, с. 10].

1. $C(u_1, \dots, u_n) = 0$, если хотя бы одна из переменных u_k равна нулю.
2. $C(1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1) = u_k$ для всех k .
3. Для любого B в I^n его « C – объем» неотрицателен.

Применение копул для моделирования многомерных совместных распределений основывается на теореме Склера, которая утверждает, что любое многомерное распределение может быть представлено в виде набора частных функций распределения и копулы, которая задаёт характер зависимости между ними.

Теорема Склера [10, с. 21]. Пусть H n -мерная функция распределения вероятностей, $F_1, \dots, F_n$ – соответствующие частные функции распределения составляющих. Тогда существует такая копула C , что

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

Если все одномерные функции распределения непрерывны, то копула определяется единственным образом.

Архимедовы копулы и их плотности. В работе Пенникаса [4] выделяется три основных семейства копул, которые используются в прикладных задачах: эллипсообразные, архимедовы, экстремальные. При описании семейства архимедовых копул используются такие понятия, как «вполне монотонная функция» и «функция-генератор».

Функция $g(t)$ называется вполне монотонной на интервале J , если она имеет на этом интервале производные всех порядков, которые меняют знак, т.е. $(-1)^k g^{(k)}(t) \geq 0, \forall t \in J, \forall k = 0, 1, 2, \dots$.

Теорема. Пусть φ непрерывная, строго убывающая функция на $[0; 1]$, $\varphi(0) = \infty$, $\varphi(1) = 0$, φ^{-1} – обратная для φ . Пусть отображение $C^n: I^n \rightarrow I$ определено формулой $C^n(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n))$.

Данное отображение является копулой тогда и только тогда, когда φ^{-1} вполне монотонна на $[0; \infty)$.

Копулы указанного в теореме вида называются архимедовыми копулами. Соответствующая функция φ называется генератором копулы.

Будем называть плотностью копулы ее смешанную производную порядка n по всем ее аргументам:

$$d(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C^n(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}.$$

Пусть $t = \sum_{i=1}^n \varphi(u_i)$, $f(t) = \varphi^{-1}(t)$. Тогда плотность архимедовой копулы вычисляется по формуле

$$d(u_1, \dots, u_n) = f^{(n)}(t) \prod_{i=1}^n \varphi'(u_i).$$

Основными архимедовыми копулами являются копулы Клейтона, Франка и Гамбела-Хаугарда.

Копула Клейтона. Будем рассматривать это однопараметрическое семейство копул только для положительных значений параметра α . Генератор копулы имеет вид $\varphi_\alpha(u) = u^{-\alpha} - 1$. Тогда функция, обратная генератору, имеет вид $f(t) = (1+t)^{-1/\alpha}$. Копула Клейтона определяется формулой

$$C_\alpha^n(u_1, \dots, u_n) = (u_1^{-\alpha} + \dots + u_n^{-\alpha} + 1 - n)^{-1/\alpha}.$$

Легко проверить, что плотность этой копулы вычисляется по формуле

$$d(u_1, \dots, u_n) = \left(\prod_{k=1}^n (\alpha k - \alpha + 1) \right) / \left((t+1)^{\frac{1}{\alpha}+n} (u_1 \dots u_n)^{\alpha+1} \right),$$

где $t = \sum_{k=1}^n u_k^{-\alpha} - n$.

Копула Франка. Генератор данной копулы имеет вид $\varphi(u) = -\ln((e^{-\alpha u} - 1)/(e^{-\alpha} - 1))$, соответственно обратная функция $f(t) = -(1/\alpha) \ln((e^{-\alpha} - 1)e^{-t} + 1)$

Копула Франка задается следующими формулами:

$$C_\alpha^n(u_1, \dots, u_n) = f(t), \quad t = \sum_{i=1}^n -\ln((e^{-\alpha u_i} - 1)/(e^{-\alpha} - 1)).$$

Введем обозначения $\beta = e^{-\alpha} - 1$, $x = \beta(e^t + \beta)^{-1}$. Тогда $f(t) = (1/\alpha) \ln(1 - x)$.

Лемма 1. Плотность копулы Франка вычисляется по формуле

$$d(u_1, \dots, u_n) = \alpha^{n-1} h_n(x) / \prod_{i=1}^n (1 - e^{\alpha u_i}).$$

Характеристические многочлены h_m задаются рекуррентными соотношениями $h_1(x) = x$, $h_m(x) = (x^2 - x)h'_{m-1}(x)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из общей формулы плотности для архимедовых копул, а также из легко проверяемых соотношений

$$\varphi'(u) = \alpha(1 - e^{\alpha u})^{-1}, \quad x'(t) = x^2 - x.$$

Запишем в явном виде первые четыре многочлена h_m .

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x, \quad h_2(x) = x^2 - x, \quad h_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + x, \\ h_4(x) &= 6x^4 - 12x^3 + 7x^2 - x. \end{aligned}$$

Пусть $h_m(x) = \sum_{k=1}^m a_k^m x^k$. Из рекуррентных соотношений для этих многочленов вытекают следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов.

$$\begin{aligned} a_{m+1}^{m+1} &= m a_m^m, \quad a_1^1 = 1 \Rightarrow a_{m+1}^{m+1} = m!; \\ a_1^{m+1} &= -a_1^m, \quad a_1^{m+1} = (-1)^m; \\ a_k^{m+1} &= (k-1)a_{k-1}^m - k a_k^m, \quad k = 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Лемма 2. Коэффициенты характеристических многочленов вычисляются по формуле

$$a_k^n = (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{k-1}^i (1+i)^{n-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство.

$$1) a_1^{n+1} = (-1)^n \sum_{i=0}^0 (-1)^i C_0^i (1+i)^n = (-1)^n.$$

$$2) a_{n+1}^{n+1} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} C_n^i (1+i)^n = n!.$$

Это очевидным образом следует из теории конечных разностей, примененной к многочленам. У примитивного многочлена степени n разности порядка n постоянны и равны $n!$ [1].

3) Проверим рекуррентное соотношение

$$a_k^{n+1} = (k-1)a_{k-1}^n - k a_k^n, \quad k = 2, \dots, n.$$

Справедливость этого соотношения вытекает из следующей цепочки равенств.

$$\begin{aligned} (-1)^n \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{k-1}^i (1+i)^n &= (k-1)(-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i C_{k-2}^i (1+i)^{n-1} - k(-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{k-1}^i (1+i)^{n-1}; \\ \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} C_{k-1}^i (1+i)^n &= (k-1) \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i C_{k-2}^i (1+i)^{n-1} - k \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{k-1}^i (1+i)^{n-1}; \\ \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{k-1}^i (1+i)^n - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{k}{1+i} C_{k-1}^i (1+i)^n &= \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i \frac{(k-1)}{(1+i)} C_{k-2}^i (1+i)^n; \\ \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{k-1}^i (1+i)^n - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} C_k^{i+1} (1+i)^n &= \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i C_{k-1}^{i+1} (1+i)^n; \\ \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} C_{k-1}^i (1+i)^n - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} (C_{k-1}^i + C_{k-1}^{i+1}) (1+i)^n &= \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i C_{k-1}^{i+1} (1+i)^n; \\ \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{k-1}^{i+1} (1+i)^n &= \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i C_{k-1}^{i+1} (1+i)^n. \end{aligned}$$

Замечание. Данная последовательность приведена в Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей [3]. Однако в энциклопедии даны только рекуррентные формулы. Явные выражения для элементов последовательности приведены в публикуемой авторами работе впервые.

Копула Гамбела-Хаугарда. Генератор данной копулы имеет вид $\varphi(u) = (-\ln u)^\alpha$. Соответственно обратная функция $f(t) = \exp(-t^{1/\alpha})$.

Копула Гамбела-Хаугарда задается следующими формулами:

$$C_\alpha^n(u_1, \dots, u_n) = f(t), \quad t = \sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\alpha.$$

Введем обозначения $\beta = 1/\alpha$, $x = t^{1/\alpha}$. Тогда $f(t) = e^{-x}$.

Лемма 3. Плотность копулы Гамбела-Хаугарда вычисляется по формуле

$$d(u_1, \dots, u_n) = (-\alpha)^{n-1} t^{-n} e^{-x} h_n(x) \prod_{i=1}^n (u_i^{-1} (-\ln u_i)^{\alpha-1}).$$

Характеристические многочлены h_m задаются рекуррентными соотношениями $h_1(x) = x$, $h_{m+1}(x) = \beta x h'_m(x) - (\beta x + m)h_m(x)$.

Доказательство. Сначала индукцией по m докажем формулу

$$f^{(m)}(t) = -\beta t^{-m} e^{-x} h_m(x).$$

Заметим, что $x'(t) = \beta x/t$. Легко проверить, что для $m = 1$ эта формула справедлива. Проверим справедливость этой формулы для $m + 1$.

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(t) &= -\beta \left(-m t^{-m-1} e^{-x} h_m(x) + t^{-m} (e^{-x} h_m(x))' \right) = \\ &= -\beta \left(-m t^{-m-1} e^{-x} h_m(x) + t^{-m} (h'_m(x) e^{-x} - h_m(x) e^{-x}) \frac{\beta x}{t} \right) = \\ &= -\beta t^{-m-1} e^{-x} (\beta x h'_m(x) - (\beta x + m) h_m(x)). \end{aligned}$$

Остается применить рекуррентную формулу для характеристических многочленов.

Запишем в явном виде первые четыре многочлена h_m .

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x, \quad h_2(x) = (\beta - 1)x - \beta x^2, \\ h_3(x) &= (\beta - 1)(\beta - 2)x - 3\beta(\beta - 1)x^2 + \beta^2 x^3, \\ h_4(x) &= (\beta - 1)(\beta - 2)(\beta - 3)x - \beta(\beta - 1)(7\beta - 11)x^2 + 6\beta^2(\beta - 1)x^3 - \beta^3 x^4. \end{aligned}$$

Пусть $h_m(x) = \sum_{k=1}^m b_k^m x^k$. Из рекуррентных соотношений для этих многочленов вытекают следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} b_1^{m+1} &= (\beta - m)b_1^m \Rightarrow b_1^{m+1} = \prod_{k=1}^m (\beta - k), \\ b_{m+1}^{m+1} &= -\beta b_m^m \Rightarrow b_{m+1}^{m+1} = (-\beta)^m, \\ b_k^{m+1} &= (k\beta - m)b_k^m - \beta b_{k-1}^m, \quad k = 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Наибольшие значения плотностей копул. Для отыскания наибольших значений плотностей найдем критические точки как решения системы уравнений

$$\frac{\partial d}{\partial u_k} = (f^{(n+1)}(t)(\varphi'(u_k))^2 + f^{(n)}(t)\varphi''(u_k)) \prod_{i=1, i \neq k}^n \varphi'(u_i) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Точки, в которых $\varphi'(u_k) = 0$ хотя бы для одного k , не могут быть точками, в которых значение плотности наибольшее, поскольку в таких точках плотность равна нулю. Из условия вполне монотонности можно вывести, что $f^{(n)}(t) \neq 0$ ни при каком t . Тогда данная система уравнений может быть записана в следующем виде

$$\frac{\varphi''(u_k)}{(\varphi'(u_k))^2} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{f^{(n)}(t)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Левая часть этого равенства для копулы Клейтона имеет вид $((\alpha + 1)/\alpha)u_k^\alpha$. Для копулы Франка соответственно получаем $e^{\alpha u_k}$, а для копулы Гамбела-Хаугарда — $(1/\alpha)(-\ln u_k)^{1-\alpha}(1 - (\alpha - 1)/\ln u_k)$. Все эти функции строго возрастают при допустимых положительных значениях параметра α . Отсюда следует, что плотность достигает наибольшего значения в точках, для которых $u_1 = \dots = u_n$.

Для копулы Клейтона данная система имеет вид

$$t+1 = ((1+\alpha n)/(1+\alpha))u_k^{-\alpha}, \quad k=1, \dots, n.$$

Суммируя эти равенства по k , находим критическую точку $u_k = (\alpha+1)^{-1/\alpha}$, $k=1, 2, \dots, n$. Значение плотности в этой точке равно

$$\left(\prod_{k=1}^n (\alpha k - \alpha + 1) \right) ((\alpha+1)^{n(\alpha+1)} / (n\alpha+1)^{n\alpha+1})^{1/\alpha}.$$

Покажем, что второй множитель меньше «1». Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = (n\alpha+1)\ln(n\alpha+1) - n(\alpha+1)\ln(\alpha+1).$$

Заметим, что $f(0)=0$, $f'(\alpha) = n\ln((n\alpha+1)/(\alpha+1)) > 0$. Значит $f(\alpha) > 0$ для всех $\alpha > 0$, откуда и следует, что второй множитель меньше «1».

Тогда наибольшего значения плотность копулы достигает при $u_k = 1$, $k=1, \dots, n$. Это наибольшее значение равно первому множителю. Таким образом,

$$d_{\max} = \prod_{k=1}^n (\alpha k - \alpha + 1).$$

Есть основания полагать, что и для других архимедовых копул плотности достигают наибольшего значения, когда все их аргументы равны «1». Однако это утверждение нуждается в дальнейшей проверке и доказательстве. Для копулы Франка получаем следующие диагональные профили поверхности функции плотности для $n=2, 3, 4$ (рис. 1).

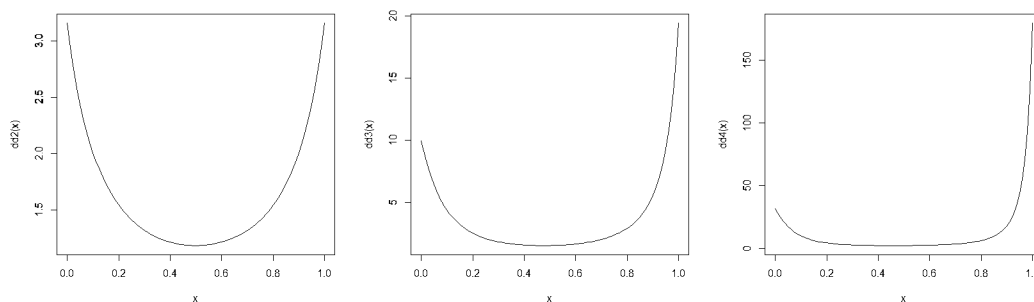


Рис. 1. Диагональные профили поверхности функции плотности копулы Франка (слева направо для $n=2, 3, 4$)

Для копулы Гамбела-Хaugарда в случае, когда $u_1 = \dots = u_n = u$, функция плотности имеет вид

$$d(u) = \frac{(-\alpha)^{n-1} u^{n^{1/\alpha}-n} h_n(-n^{1/\alpha} \ln(u))}{n^n (-\ln(u))^n}.$$

Поскольку h_n – многочлен степени n от $(-\ln(u))$, то $\lim_{u \rightarrow 1} d(u) = +\infty$. Это обстоятельство может создавать некоторые трудности для оценки моделей с копулой Гамбела-Хaugарда.

Применение плотностей архимедовых копул в задаче прогнозирования курсов валют. Как уже отмечалось выше, плотности копул являются необходимым инструментом оценивания копулярных моделей совместных распределений. В данной статье плотности архимедовых копул используются для оценки параметров совместного распределения курсов пяти иностранных валют по отношению к рублю. В качестве этих валют выбраны канадский доллар (CAD), евро (EUR), английский фунт (GBP), японская йена (JPY) и американ-

ский доллар (USD). Выбор данных валют был обусловлен тем фактом, что они носят статус резервных и, в частности, активы, номинированные в этих валютах, формируют более 95 % валютных активов Центрального банка России. В работе были использованы данные о курсах валют в период с 9.01.2008 по 21.09.2013. На основе этих данных были оценены параметры моделей, а затем был сделан прогноз на 30 тактов времени вперед. Результаты прогнозов сопоставлялись с реальными данными за тот же период. Все данные были взяты с сайта информационного агентства «РосБизнесКонсалтинг», где публикуются курсы валют, установленные Центральным банком Российской Федерации [5].

Первичная обработка данных. Анализируемые ряды валютных курсов были подвергнуты предварительной обработке, цель которой состояла в удалении неслучайной составляющей временного ряда.

Так, ряды абсолютных значений курсов валют были заменены рядами логарифмических доходностей $r_t = \ln(P_t/P_{t-1})$, где P_t – значение курса в момент времени t , а r_t – доходность. Далее для каждого ряда доходности была оценена модель авторегрессии – условной гетероскедастичности AR(1)-GARCH(1,1). Такие модели задаются уравнениями вида $r_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + e_t$, $h_t = \beta_0 + \beta_1 e_{t-1}^2 + \beta_2 h_{t-1}$. Здесь e_t – остатки модели авторегрессии, h_t – условная дисперсия. Полученные оценки коэффициентов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты моделей авторегрессии – условной гетероскедастичности

	CAD	EUR	GBP	JPY	USD
α_0	3,37E-05	-8,58E-05	-8,31E-05	-2,66E-05	-0,00021
α_1	0,053	0,101	0,02	0,007	0,072
β_0	7,08E-07	1,35E-06	4,96E-07	6,78E-06	1,39E-06
β_1	0,073	0,159	0,057	0,133	0,11
β_2	0,914	0,809	0,936	0,81	0,868

Далее ряды остатков авторегрессии нормировались по формуле $z_t = e_t / \sqrt{h_t}$.

Эта процедура была реализована для курсов каждой из иностранных валют, что позволило перейти к анализу необъяснённой, случайной составляющей временных рядов валютных курсов. С другой стороны, на заключительном этапе прогнозирования необходима реализация процедуры возврата к исходным рядам путём обратного пересчёта.

Модели одномерных распределений. В качестве моделей одномерных распределений использовались асимметричные распределения Стьюдента, которые имеют более «тяжелые хвосты» по сравнению с нормальным распределением. Плотность распределения Стьюдента имеет вид [6, с. 898]:

$$d(z; \lambda; \eta) = \begin{cases} bc \left(1 + \frac{1}{\eta - 2} \left(\frac{bz + a}{1 - \lambda} \right)^2 \right)^{-(\eta+1)/2}, & z < -a/b \\ bc \left(1 + \frac{1}{\eta - 2} \left(\frac{bz + a}{1 + \lambda} \right)^2 \right)^{-(\eta+1)/2}, & z \geq -a/b \end{cases}$$

где $a = 4c\lambda\left(\frac{\eta-2}{\eta-1}\right)$, $b = \sqrt{1+3\lambda^2-a^2}$, $c = \Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right) / \left(\sqrt{\pi(\eta-2)}\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)$, η – число степеней свободы (хвостовой параметр), λ – параметр смещения, $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Параметры распределений оценивались методом максимального правдоподобия с использованием системы программирования (СП) «R». Это бесплатный программный продукт, обладающий многочисленными расширениями и дополнительными пакетами, позволяющими в полной мере использовать преимущества СП при проведении статистических исследований [12]. Полученные оценки коэффициентов представлены в табл. 2.

Таблица 2

Оценки коэффициентов асимметричного распределения Стьюдента

	CAD	EUR	USD	GBP	JPY
λ	0,03	0,06	0,06	-0,02	0,12
η	6,9	5,1	5,8	5,7	7,5

Копулярные модели. На основе полученных оценок одномерных распределений были сгенерированы ряды моделируемых значений функции распределения для каждой из валют. Эти ряды использовались далее для оценки параметров копулярных моделей на основе копул Клейтона, Франка и Гамбела-Хаугарда.

Оценки были получены методом максимального правдоподобия с использованием СП «R». Эти оценки представлены в табл. 3.

Таблица 3

Оценки параметров копул

	Копула Клейтона	Копула Франка	Копула Гамбела-Хаугарда
α	0.441	2.253	1.299

Имитационное моделирование выборки из совместного распределения. На основе построенных моделей совместных распределений были сгенерированы выборки объемом 30 наблюдений каждая, что соответствует интервалу прогноза. Для имитационного моделирования выборок использовался метод Монте-Карло на марковских цепях (Markov Chain Monte Carlo, далее – МСМС). В частности, применялся алгоритм Метрополиса со случайным блужданием [7]. Выбор этого алгоритма обусловлен тем, что в других алгоритмах МСМС распределение-кандидат должно доминировать целевое распределение. Однако для модели с копулой Гамбела-Хаугарда подобрать такое распределение невозможно. Мы показали, что функция плотности этой копулы не ограничена. Алгоритм Метрополиса со случайным блужданием в данном случае включает следующие шаги.

В качестве начального значения берется последнее наблюдение исходной выборки Z_0 .

Для $n = 1, \dots, 3100$ повторяются следующие шаги.

1. Извлекается пятерка чисел из пятимерного нормального распределения с независимыми составляющими. В качестве вектора средних значений используется Z_{n-1} . Стандартные отклонения равны «1», поскольку ряды «z» нормированы.

2. Вычисляется величина $A = f(Z_n)/f(Z_{n-1})$, где $f(Z)$ – смоделированная функция плотности совместного пятимерного распределения.

3. Извлекается случайное равномерно распределенное число «u» из [0;1]. Если $A > u$, то новое значение принимается, в противном случае $Z_n = Z_{n-1}$.

Предложенный алгоритм был реализован в СП «R». Для всех трех моделей уровень принятия новых значений составил примерно 20 %. Это говорит о высокой коррелированности наблюдений в каждой выборке. Поэтому выборки были подвергнуты «выжиганию» и прореживанию. Первые 199 наблюдений были отброшены, и далее выбиралось каждое сотое наблюдение. В итоге были построены выборки объемом 30 наблюдений. Для проверки адекватности моделей и их сравнения сопоставлялись матрицы коэффициентов корреляции Кендалла, построенные по реальной выборке и модельным выборкам. Для сравнения модельной матрицы с матрицей для исходной выборки вычислялась среднеквадратическая ошибка. Полученные результаты представлены в табл. 4.

Таблица 4

Матрицы коэффициентов корреляции Кендалла

CAD	EUR	GBP	JPY	USD
Исходная выборка				
1	0,183	0,321	0,16	0,287
0,183	1	0,322	0,193	0,071
0,321	0,322	1	0,264	0,308
0,16	0,193	0,264	1	0,474
0,287	0,071	0,308	0,474	1
Модельная выборка на основе копулы Клейтона				
1	0,03	0,2	0,021	0,085
0,03	1	0,14	0,044	0,117
0,2	0,14	1	-0,154	0,057
0,021	0,044	-0,154	1	0,255
0,085	0,117	0,057	0,255	1
Ошибка	0,21			
Модельная выборка на основе копулы Франка				
1	0,347	0,434	0,232	0,292
0,347	1	0,159	0,14	0,356
0,434	0,159	1	0,264	0,205
0,232	0,14	0,264	1	0,223
0,292	0,356	0,205	0,223	1
Ошибка	0,152			
Модельная выборка на основе копулы Гамбела-Хаугарда				
1	0,283	0,186	-0,057	0,071
0,283	1	0,214	0,209	-0,021
0,186	0,214	1	-0,09	0,14
-0,057	0,209	-0,09	1	0,163
0,071	-0,021	0,14	0,163	1
Ошибка	0,198			

Из данных, представленных в табл. 4, видно, что, с одной стороны, модельные матрицы в целом верно отражают сравнительную «силу зависимости» между рядами данных. Однако фактические значения модельных коэффициентов корреляции сильно отличаются от выборочных значений. Для всех моделей ошибка имеет величину, аналогичную самим коэффициентам. Все же следует отметить, что модель с использованием копулы Франка дает несколько лучшие результаты по сравнению с другими двумя моделями.

Прогноз значений курсов валют. На основе симулированной выборки рядов «z» с использованием моделей AR(1)-GARCH(1,1) путем обратного пересчета процедуры предварительной обработки были построены прогнозы значений курсов валют на 30 тактов времени вперед. Полученные прогнозы сравнивались с реальными значениями курсов за тот же

период (24.09.2013 – 2.11.2013). На следующих рисунках приведены для каждой из валют график реального курса и прогнозы, полученные по каждой модели.

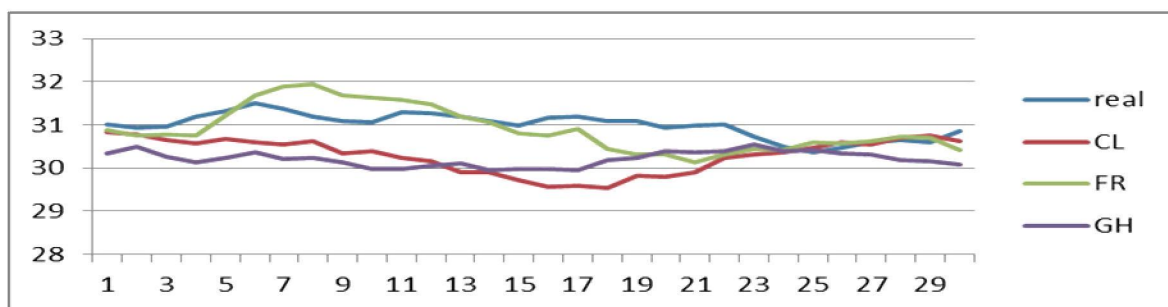


Рис. 2. Фактическое и прогнозируемые (на основе трёх копул) значения курса канадского доллара

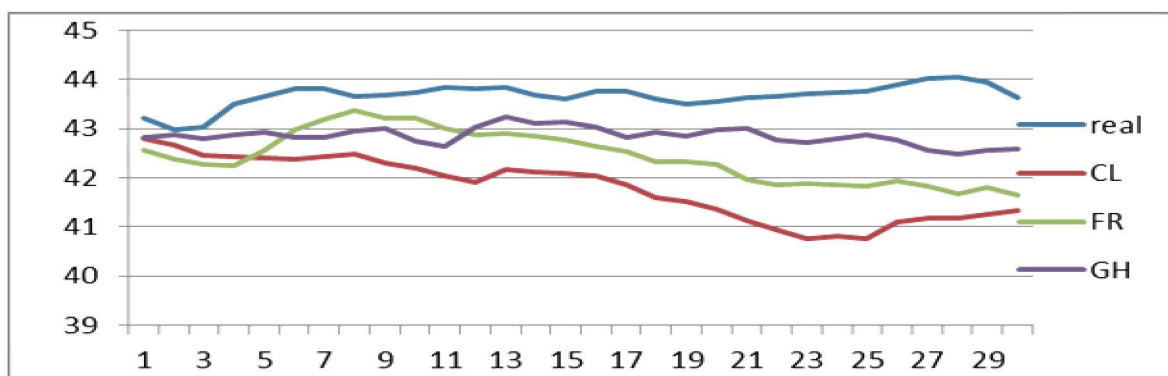


Рис. 3. Фактическое и прогнозируемые (на основе трёх копул) значения курса евро

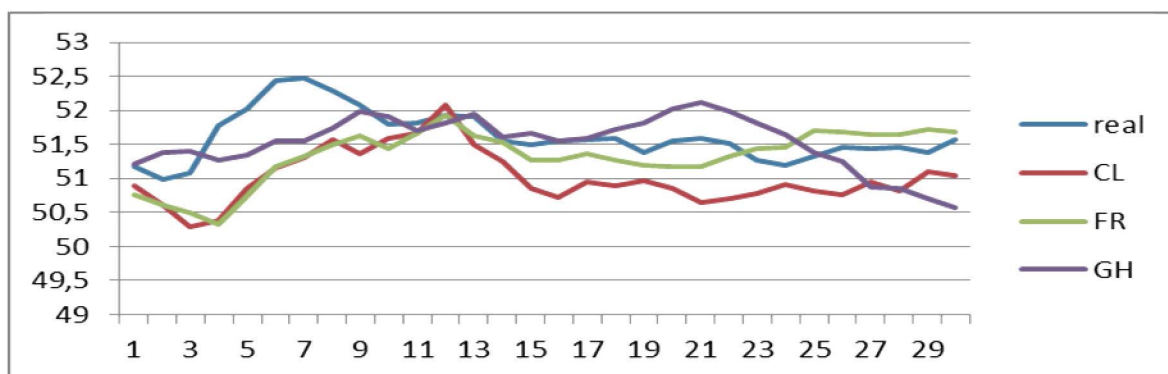


Рис. 4. Фактическое и прогнозируемые (на основе трёх копул) значения курса британского фунта

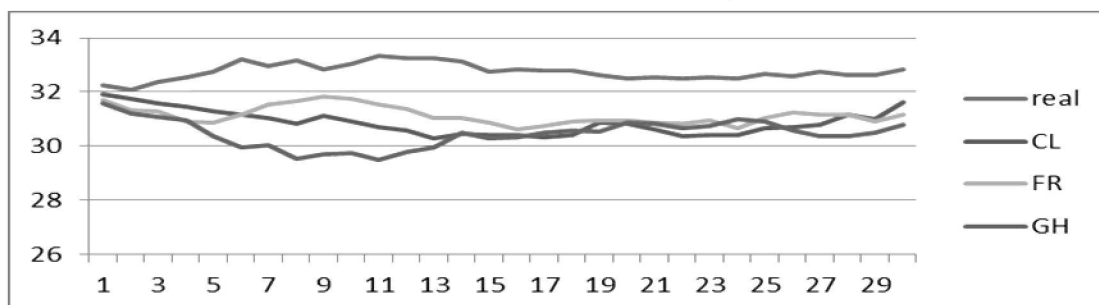


Рис. 5. Фактическое и прогнозируемые (на основе трёх копул) значения курса японской иены (рублей за 100 иен)

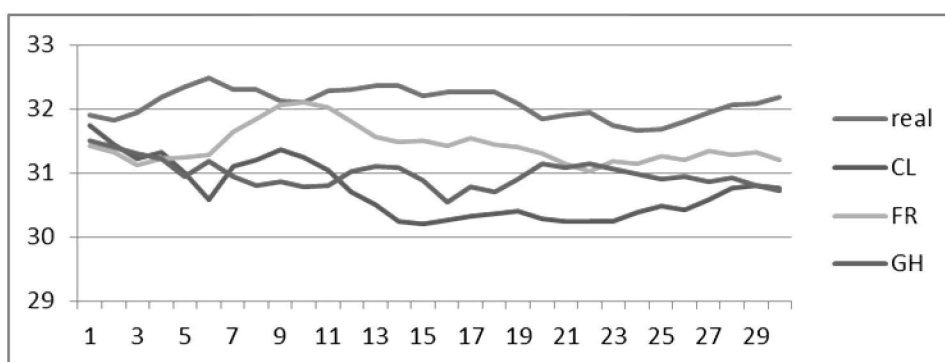


Рис. 6. Фактическое и прогнозируемые (на основе трёх копул) значения курса американского доллара

Визуальный анализ графиков показывает, что прогнозы оказались более удачными для канадского доллара, английского фунта и американского доллара, чем для евро и иены. Можно также заметить, что метод сильно ошибается по прогнозу тенденций. Видно, что наилучший прогноз в целом по всем валютам дает модель с копулой Франка. Для более детального анализа результатов подсчитаем суммы квадратов остатков и среднеквадратическую ошибку прогноза. Они приведены в табл. 5.

Таблица 5

Ошибки прогнозов

Копула	CAD	EUR	GBP	JPY	USD	Ошибка
Клейтона	23,391	123,43	14,747	118,074	63,353	1,512
Франка	5,18	56,7	9,475	82,736	15,185	1,062
Гамбела-Хаугарда	22,624	23,388	6,67	176,411	40,753	1,341

Данные табл. 5 подтверждают вывод о том, что наилучшим в целом является прогноз по модели на основе копулы Франка. При этом для евро и фунта модель с копулой Гамбела-Хаугарда дала лучший прогноз. Из результатов в табл. 5 следует, что ошибка предсказания для копулы Франка чуть больше одного рубля, что, по мнению авторов, является приемлемым результатом.

Заключение. Аппарат копул предоставляет широкий набор возможностей для моделирования взаимодействия набора случайных величин. Это особенно актуально в сфере управления валютными и финансовыми рисками.

При практическом применении аппарата копул, и в частности при оценке параметров модели, возникает необходимость использования явных выражений для плотности функции ко-

пул. В данной работе выведены формулы плотности для наиболее известных представителей семейства архимедовых копул (копула Клейтона, копула Франка, копула Гамбела-Хаугарда).

На примере данных по динамике курсов валют показаны возможные подходы к построению прогнозов на основе применения копул. При этом в качестве критерия оптимального выбора типа копулы использован показатель среднеквадратической ошибки прогноза. Наилучший прогноз по курсам валют в целом был получен по модели на основе копулы Франка.

Список литературы

1. Конечные разности. – Режим доступа: <http://ru.wikipedia.org/wiki/> (дата обращения 06.11.2013), свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус.
2. Обзор деятельности Банка России по управлению валютными активами. – Москва : Банк России, 2013. – Вып. 1 (25). – 16 с.
3. Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей. – Режим доступа: <http://oeis.org/A075263> (дата обращения 10.02.2014), свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус.
4. Пеникас Г. И. Модели «копула» в приложении к задачам финансов / Г. И. Пеникас // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2010. – № 7. – С. 24–44.
5. РосБизнесКонсалтинг – информационное агентство. – Режим доступа: www.rbc.ru (дата обращения 02.10.2013), свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус.
6. Ane T. Time-varying conditional dependence in Chinese stock markets / T. Ane, L. Ureche-Rangau, C. Labidi-Makni // *Applied Financial Economics*. – 2008. – № 18. – P. 895–916.
7. Bolstad William M. *Understanding Computational Bayesian Statistics* / William M. Bolstad. – Wiley, 2010. – 336 p.
8. Cherubini U. *Copula Methods in Finance* / U. Cherubini, E. Luciano, W. Vecchiato. – Wiley, 2004. – 293 p.
9. Gordeev V. A. Selection of copula model for inter-market dependence / V. A. Gordeev, A. G. Kniazev, A. E. Shemyakin // *Model Assisted Statistics and Applications*. – 2012. – № 7. – P. 315–325.
10. Nelsen Roger B. *An Introduction to Copulas* / Roger B. Nelsen – New York : Springer, 2006. – 269 p.
11. Patton Andrew J. *Modelling time-varying exchange rate dependence using the conditional copula* / Andrew J. Patton // *Discussion Paper 2001-09*. – San Diego : University of California, 2001. – 51 p.
12. The R Project for Statistical Computing. – Available at: <http://r-project.org> (accessed 05.12.2013).
13. Wu F. *Simulating Exchangeable Multivariate Archimedean Copulas and its Applications* / F. Wu, E. Valdez, M. Sherris. – Institute of Actuaries of Australia, 2006. – 18 p.

References

1. Finite differences. Available at: <http://ru.wikipedia.org/wiki/> (accessed 6 December 2013). (In Russ.)
2. *Obzor deyatel'nosti Banka Rossii po upravleniyu valyutnymi aktivami* [Overview of activities of the Bank of Russia for management of foreign exchange assets]. Moscow, Bank of Russia, 2013, no. 1 (25). 16 p.
3. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: <http://oeis.org/A075263> (accessed 10 February 2014). (In Russ.)
4. Penikas G. I. *Modeli «kopula» v prilozhenii k zadacham finansov* [Financial Applications of Copula-Models]. *Zhurnal Novoy ekonomicheskoy assotsiatsii* [The Journal of New Economic Association], 2010, no. 7, pp. 24–44.
5. RosBusinessConsulting – information agency. Available at: www.rbc.ru (accessed 2 October 2014). (In Russ.)
6. Ane T., Ureche-Rangau L. and Labidi-Makni C. Time-varying conditional dependence in Chinese stock markets. *Applied Financial Economics*, 2008, no. 18, pp. 895–916.
7. Bolstad William M. *Understanding Computational Bayesian Statistics*. Wiley, 2010. 336 p.
8. Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. *Copula Methods in Finance*. Wiley, 2004. 293 p.
9. Gordeev V. A., Kniazev A. G., Shemyakin A. E. Selection of copula model for inter-market dependence. *Model Assisted Statistics and Applications*, 2012, no. 7, pp. 315–325.
10. Nelsen Roger B. *An Introduction to Copulas*. New York, Springer, 2006. 269 p.

11. Patton Andrew J. Modelling time-varying exchange rate dependence using the conditional copula. *Discussion Paper 2001-09*. San Diego, University of California, 2001. 51 p.
12. The R Project for Statistical Computing. Available at: <http://r-project.org> (accessed 5 December 2013).
13. Wu F., Valdez E., Sherris M. Simulating Exchangeable Multivariate Archimedean Copulas and its Applications. Institute of Actuaries of Australia, 2006. 18 p.

УДК 621.3

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ РАБОТЫ СИСТЕМЫ МОНИТОРИНГА И КОНТРОЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТЕПЕНИ ПОВРЕЖДЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Статья поступила в редакцию 19.02.2014, в окончательном варианте 24.02.2014.

Савочкин Александр Евгеньевич, аспирант, Пензенский государственный технологический университет, 440039, Российская Федерация, г. Пенза, проезд Байдукова / ул. Гагарина, д. 1а/11, e-mail: aebrat@mail.ru

Цель статьи – разработка и апробация алгоритма решения задач идентификации состояния технически сложных объектов (ТСО). Автором рассмотрена общая архитектура систем мониторинга и контроля ТСО (СМиК ТСО), представляющих собой обобщенное, единое решение платформенного уровня, объединяющее архитектуру данных, архитектуру приложений в рамках иерархической интегрированной архитектуры. Предложена модернизированная структурная схема СМиК ТСО, включающая блок нейросетевой идентификации. В рамках выполненных исследований для входного сигнала с ТСО были выбраны методы обработки, оптимальный алгоритм фильтрации, опробованы архитектуры многослойных нейронных сетей, проведено тестирование и оценка точности результатов идентификации. Затем была выбрана оптимальная архитектура искусственной нейронной сети (ИНС). Путем моделирования ИНС была выявлена степень повреждения ТСО для нескольких тестовых сигналов; проведены проверки полученных результатов на точность и адекватность. Они показали высокие идентификационные способности использованной ИНС.

Ключевые слова: прогнозирование, алгоритм, фильтрация, технически сложные объекты, интеллектуальный анализ данных, нейронная сеть, нейровычисления, идентификация

ALGORITHMIZATION OF SYSTEM OPERATION OF MONITORING AND CONTROL FOR SOLUTION OF IDENTIFICATION TASKS OF DAMAGE LEVEL OF TECHNICALLY COMPLEX OBJECTS

Savochkin Alexandr Ye., post-graduate student, Penza State Technological University, 1a/11 pr. Baidukova / ul. Gagarina, Penza, 440039, Russian Federation, e-mail: aebrat@mail.ru

The purpose of this article is to develop algorithm of the solution of identification's tasks of a TCO's status was set, the author considered a system architecture of monitoring and monitoring of technically difficult objects – SMAC TCO – the generalized, single solution of platform level integrating architecture of data, architecture of applications within the hierarchical integrated architecture. During writing of article the upgraded skeleton diagram of SMAC TCO which is turning on the unit of neural network identification was offered. Within the conducted researches the input signal with TCO was processed, selected optimum algorithm of filtering, architecture of multi-layer neural networks were tested, testing and an assessment of accuracy of results of identification was held. After that the optimum architecture of the artificial neural network was selected. By means of simulation of NN TCO (S) damage level for several test signals was revealed and inspections on the accuracy and adequacy are carried out. They testify to high identification abilities of used NN.

Keywords: forecasting, algorithm, filtering, technically difficult objects, data mining, neural network, neuro computing, identification