

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ
В ЗАДАЧАХ ПРОДОЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УЧАСТКА
МАГИСТРАЛЬНОГО ГАЗОПРОВОДА**

Миклуш Александр Сергеевич, ведущий инженер-конструктор 1-ой категории, ООО ПКФ «Вертикаль», 105120, Российская Федерация, г. Москва, Съезжинский переулок, д. 6, e-mail: mklsh_lksndr_srgvch@mail.ru

Воеводин Илья Геннадьевич, кандидат технических наук, доцент, Астраханский государственный университет, 414056, Российская Федерация, г. Астрахань, ул. Татищева, 20а, e-mail: vvdn_l_gnndvch@mail.ru

В статье приводится математическая модель для расчета технологических параметров закрепления магистральных газопроводов на слабонесущих грунтах анкерными устройствами. Модель использует элементы теории напряженно-деформированного состояния трубопроводов. Проведено математическое моделирование действующих на газопровод продольных сил, предложен способ определения возможности потери устойчивости объекта. Описывается применение метода малого параметра, распространенного на системы с распределенными нагрузками, для упругой системы сложной структуры с трением. Получены общие виды дифференциального уравнения и краевых условий. Показано применение этого метода при исследовании состояний закрепленного анкерами участка магистрального газопровода. Наличие максимума на кривой состояния будет свидетельствовать о потере в данной точке устойчивости рассматриваемого участка трубопровода. Используется теорема Лагранжа-Дирихле, в соответствии с которой положения равновесия, соответствующие минимуму потенциальной энергии, являются устойчивыми, максимуму – неустойчивыми.

Ключевые слова: магистральный газопровод, анкерное устройство, слабонесущий грунт, несущая способность, продольная и поперечная нагрузка, малый параметр

**ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF EQUATIONS IN THE PROBLEMS
OF LONGITUDINAL STABILITY OF THE MAIN GAS PIPELINE SECTION**

Miklush Alexandr S., Leading Design Engineer of the First Category, Production and Commercial Company "Vertical" Ltd, 6 Sezzhinsky pereulok, Moscow, 105120, Russian Federation, e-mail: mklsh_lksndr_srgvch@mail.ru

Voevodin Ilya G., Ph.D. (Engineering), Associate Professor, Astrakhan State University, 20a Tatishchev St., Astrakhan, 414056, Russian Federation, e-mail: vvdn_l_gnndvch@mail.ru

The paper presents a mathematical model for calculating the process parameters for fixing gas main pipelines on non-cohesive soils with anchors. The model uses the elements of the theory of the stress-strain state of pipelines. The study includes mathematical modeling of the longitudinal forces acting to the pipeline, and developing of method for determining possibility of stability loss of the object. The paper describes using of the small parameter method that extended to the systems with the distributed load, for the elastic system of the complex structure with friction. The study allowed obtaining the general kinds of differential equations and boundary conditions. The paper shows applications of this method in the analysis of states of the fixed by anchors section of the main pipeline. Presence of a maximum in the curve will indicate the status of the loss of stability at considered point of the analyzed pipeline section. The study uses Lagrange-Dirichlet theorem, according to which the equilibrium positions, corresponding to the minimum potential energy, are stable, and the equilibrium positions, corresponding to the maximum potential energy, are unstable.

Keywords: main gas pipeline, anchors, non-cohesive soils, retention capacity, longitudinal and transverse load, small parameter

Энергетический метод исследования устойчивости равновесия основан на теореме Лагранжа-Дирихле для консервативных систем, согласно которой в положении равновесия потенциальная энергия U имеет либо минимум, либо максимум. При минимальном значении энергии U равновесие устойчиво, при максимальном – неустойчиво. Теорема Лагранжа-Дирихле дает прием для разрешения задач устойчивости системы. Сначала ищут потенциальную энергию системы, а затем минимальные и максимальные значения энергии. Положения равновесия, соответствующие минимуму потенциальной энергии, являются устойчивыми, максимуму – неустойчивыми. С математической точки зрения вопрос сводится к известным задачам дифференциального исчисления о нахождении минимума или максимума функций.

Предположим, что наша система может быть описана как система с конечным числом степеней свободы и ее потенциальная энергия выражается в виде функции:

$$U = U(x_1, x_2, \dots, x_n; v), \quad (1)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – обобщенные координаты системы; v – параметр нагрузки.

Предполагаем также, без ограничения общности, что условие $v = 0$ соответствует отсутствию нагрузки и в этом случае система имеет устойчивое положение равновесия:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0. \quad (2)$$

Необходимым признаком экстремума функции U является равенство нулю всех частных производных

$$\partial U / \partial x_{i=1,2,\dots,n} = f_{i=1,2,\dots,n}(x_1, x_2, \dots, x_n; v) = 0. \quad (3)$$

Функции f_i , вообще говоря, не являются линейными относительно $x_1, x_2, \dots, x_n$. Этому соответствует случай, когда потенциальная энергия является квадратичной формой относительно обобщенных координат.

Сущность статического метода исследования устойчивости системы заключается в следующем. Учитывая тот факт, что при $v = 0$ система устойчива, достаточным условием устойчивости системы является постоянство знака определителя из вторых производных потенциальной энергии, а именно (здесь и далее в фигурных скобках приведены строки матрицы):

$$\det \parallel \{ \partial^2 U / \partial x_1 \partial x_1, \partial^2 U / \partial x_1 \partial x_2, \dots, \partial^2 U / \partial x_1 \partial x_n \}; \\ \{ \partial^2 U / \partial x_2 \partial x_1, \partial^2 U / \partial x_2 \partial x_2, \dots, \partial^2 U / \partial x_2 \partial x_n \}; \dots; \\ \{ \partial^2 U / \partial x_n \partial x_1, \partial^2 U / \partial x_n \partial x_2, \dots, \partial^2 U / \partial x_n \partial x_n \} \parallel > 0. \quad (4)$$

Значение параметра v , при котором этот определитель обращается в нуль, считается критическим значением.

Пусть среди координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно выделить одно значение $v = x_k$, которое обычно называют характерным перемещением.

Во многих случаях состояние равновесия упругой системы можно определить двумя параметрами – характерным перемещением s и параметром нагрузки σ . Тогда всей совокупности состояний равновесия соответствует некоторая кривая в системе осей s и σ . Она позволяет предсказать поведение системы при монотонном возрастании параметра нагрузки (или параметра перемещений), увидеть области устойчивости и отметить критические значения параметров.

При обсуждении поведения системы будем предполагать монотонное возрастание параметра нагрузки до некоторого значения $\sigma_{кр}$. При $\sigma > \sigma_{кр}$ формы равновесия отсутствуют [2, 5]. Приведенный случай характерен отсутствием состояний равновесия при $\sigma > \sigma_{кр}$, поэтому при достижении критической нагрузки происходит, строго говоря, не потеря устойчивости, а потеря равновесия – покой становится невозможным.

Таким образом, условием потери устойчивости второго рода является равенство нулю определителя:

$$\det \parallel \{ \partial f_1 / \partial x_1, \partial f_1 / \partial x_2, \dots, \partial f_1 / \partial x_n \}; \\ \{ \partial f_2 / \partial x_1, \partial f_2 / \partial x_2, \dots, \partial f_2 / \partial x_n \}; \dots; \\ \{ \partial f_n / \partial x_1, \partial f_n / \partial x_2, \dots, \partial f_n / \partial x_n \} \parallel = 0. \quad (5)$$

Однако, чтобы найти критическое значение параметра нагрузки, нельзя, монотонно увеличивая параметр нагрузки от нуля, находить равновесные состояния из системы нелинейных уравнений:

$$f_{i=1,2,\dots,n}(x_1, x_2, \dots, x_n; v) = 0. \quad (6)$$

Дело в том, что решая эту систему уравнений любым численным методом относительно неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ при приближении значений параметра v к $v_{кр}$ мы уже будем получать вырожденную систему. Этим объясняется тот факт, что традиционно составленные программы расчета трубопроводов не в состоянии вычислить критическое значение продольной силы [1].

Эти программы имеют характер поверочных расчетов, а для значений критической нагрузки принимаются величины, полученные из совсем других расчетов, а именно из примеров, которые удалось рассчитать аналитически [3]. Разумеется, нет никакой уверенности в том, что из таких примеров можно получить надежные расчеты для нормативных документов.

Кстати, для случая закрепления трубопроводов анкерами даже такие примеры отсутствуют, и условия устойчивости формулируются из общих соображений. Покажем, каким образом можно преодолеть указанные сложности [4].

Введем некоторый параметр r , пока не конкретизируя его, а все неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_n$ и v будем считать полностью равноправными. Тогда после дифференцирования можно записать:

$$(\partial f_1 / \partial x_1) \cdot (\partial x_1 / \partial r) + (\partial f_1 / \partial x_2) \cdot (\partial x_2 / \partial r) + \dots + (\partial f_1 / \partial x_n) \cdot (\partial x_n / \partial r) + (\partial f_1 / \partial v) \cdot (\partial v / \partial r) = 0; \\ (\partial f_2 / \partial x_1) \cdot (\partial x_1 / \partial r) + (\partial f_2 / \partial x_2) \cdot (\partial x_2 / \partial r) + \dots + (\partial f_2 / \partial x_n) \cdot (\partial x_n / \partial r) + (\partial f_2 / \partial v) \cdot (\partial v / \partial r) = 0; \dots; \quad (7) \\ (\partial f_n / \partial x_1) \cdot (\partial x_1 / \partial r) + (\partial f_n / \partial x_2) \cdot (\partial x_2 / \partial r) + \dots + (\partial f_n / \partial x_n) \cdot (\partial x_n / \partial r) + (\partial f_n / \partial v) \cdot (\partial v / \partial r) = 0.$$

Теперь выделим произвольную координату x_i как характерную и добавим к системе (7) еще одно уравнение:

$$dx_i / dr = 1. \quad (8)$$

Это условие идентифицирует параметр r как x_i . Однако выделение этого условия в отдельное имеет большие преимущества, так как система (7) готовится один раз, а условие (8) можно легко сменить на другое.

Теперь можно считать, что исходная система имела $(n + 1)$ неизвестное и параметр r и можно записать систему из $(n + 1)$ уравнения:

$$f_{i=1,2,\dots,n}(x_1, x_2, \dots, x_n; v; r) = 0; \quad x_i = 1, 2, \dots, n - r = 0. \quad (9)$$

Оказывается, такой подход дает возможность найти критическое значение параметра $v = v_{кр}$, применяя к системе (9) метод дифференцирования по параметру [8, 9].

Дело в том, что в отличие от случая, когда матрица A :

$$A = \parallel \{ \partial f_1 / \partial x_1, \partial f_1 / \partial x_2, \dots, \partial f_1 / \partial x_n \}; \\ \{ \partial f_2 / \partial x_1, \partial f_2 / \partial x_2, \dots, \partial f_2 / \partial x_n \}; \dots; \\ \{ \partial f_n / \partial x_1, \partial f_n / \partial x_2, \dots, \partial f_n / \partial x_n \} \parallel. \quad (10)$$

вырождается, матрица расширенной системы:

$$A = \parallel \{ \partial f_1 / \partial x_1, \partial f_1 / \partial x_2, \dots, \partial f_1 / \partial x_n, \partial f_1 / \partial v \}; \\ \{ \partial f_2 / \partial x_1, \partial f_2 / \partial x_2, \dots, \partial f_2 / \partial x_n, \partial f_2 / \partial v \}; \dots; \\ \{ \partial f_n / \partial x_1, \partial f_n / \partial x_2, \dots, \partial f_n / \partial x_n, \partial f_n / \partial v \}; \\ \{ 0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0 \} \parallel \quad (11)$$

невыврожденная (за исключением каких-то нереальных с точки зрения реализации на практике случаев). Переход через точку максимума в область неустойчивых состояний с принципиальной точки зрения не вызывает осложнений.

Нелинейную систему уравнений равновесия участка газопровода (стержень трубчатого сечения, жестко закрепленный по концам с нелинейно-упругими связями) относительно координат перемещений Z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_{01} &= \delta_{11} \cdot P_1 + \delta_{12} \cdot P_2 + \dots + \delta_{1n} \cdot P_n + (q + q_0) \cdot \delta_{1q}; \\ Z_2 + Z_{02} &= \delta_{21} \cdot P_1 + \delta_{22} \cdot P_2 + \dots + \delta_{2n} \cdot P_n + (q + q_0) \cdot \delta_{2q}; \dots; \\ Z_n + Z_{0n} &= \delta_{n1} \cdot P_1 + \delta_{n2} \cdot P_2 + \dots + \delta_{nn} \cdot P_n + (q + q_0) \cdot \delta_{nq}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= - (K_1/M_1) \cdot Z_1 \cdot \exp[-(Z_1/M_1)^{N_1}]; \\ P_2 &= - (K_2/M_2) \cdot Z_2 \cdot \exp[-(Z_2/M_2)^{N_2}]; \dots; \\ P_n &= - (K_n/M_n) \cdot Z_n \cdot \exp[-(Z_n/M_n)^{N_n}], \end{aligned} \quad (13)$$

где q – поперечная равномерно-распределенная нагрузка; $P_1, P_2, \dots, P_n$ – реактивные силы от анкерных устройств, зависящие только от дополнительных перемещений Z_i ($i = 1, 2, \dots, n$), т.е. P_i – поперечная нагрузка в i -ом сечении, удерживающая газопровод; Z_{0i} ($i = 1, 2, \dots, n$) – начальные перемещения сечений – мест закрепления анкерных устройств при действии фиктивной нагрузки q_0 ; δ_{ij} и δ_{iq} ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$) – податливости, зависящие от параметра продольной силы $\alpha = [T/(E \cdot J)]^{1/2}$, где T – продольная сила; E – модуль упругости стали; J – момент инерции сечения газопровода; $P_i = f(K_i, M_i, N_i, Z_i)$ – несущая способность анкера в виде трехпараметрической степенной функции от Z_i ($i = 1, 2, \dots, n$), причем K_i, M_i и N_i (K_i имеет размерность силы, M_i – размерность перемещения и N_i – безразмерный параметр) – параметры, определяемые путем статистического анализа результатов экспериментальных исследований податливости винтовых анкеров.

В векторном виде систему уравнений можно записать следующим образом:

$$dZ/dr = A_0 \cdot (dP/dr) + C \cdot (dq/dr); \quad (14)$$

$$dP_i/dr = - (K_i/M_i) \cdot \varphi(Z_i) \cdot (dZ_i/dr); \quad (15)$$

$$\varphi(Z_i) = [1 - N_i \cdot (Z_i/M_i)^{N_i}] \cdot \exp[-(Z_i/M_i)^{N_i}], \quad (16)$$

где в фигурных скобках приведены столбцы соответствующих матриц $dZ/dr = \|\{\partial Z_i/\partial r, \partial Z_2/\partial r, \dots, \partial Z_n/\partial r\}\|$, $dP/dr = \|\{\partial P_1/\partial r, \partial P_2/\partial r, \dots, \partial P_n/\partial r\}\|$, $C = \|\{\delta_{1q}, \delta_{2q}, \dots, \delta_{nq}\}\|$, $A_0 = \|\{\delta_{ij}\}\|$.

Если ввести еще одну матрицу:

$$\begin{aligned} R &= \|\{-(K_1/M_1) \cdot \varphi(Z_1), 0, 0, \dots, 0\}; \\ &\{0, -(K_2/M_2) \cdot \varphi(Z_2), 0, \dots, 0\}; \dots; \\ &\{0, 0, 0, \dots, -(K_n/M_n) \cdot \varphi(Z_n)\}\|, \end{aligned} \quad (17)$$

вместо уравнения (12) можно записать:

$$(E - A_0 \cdot R) \cdot dZ/dr - C \cdot dq/dr = 0, \quad (18)$$

где E – квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны единице, а остальные равны нулю.

Следуя методу дифференцирования по параметру, добавляем еще одно уравнение:

$$dZ_k/dr = 1, \quad (19)$$

идентифицирующее параметр r как Z_k , разрешаем систему (18)–(19) относительно производных и добавляем начальные условия. В результате получим систему дифференциальных уравнений в нормальном виде.

Если начального искривления нет, то имеем начальные условия вида

$$r = 0; Z_1 = 0; Z_2 = 0; \dots; Z_n = 0; q = 0. \quad (20)$$

В случае наличия начального искривления имеем:

$$r = 0; Z_1 = Z_{01}; Z_2 = Z_{02}; \dots; Z_n = Z_{0n}; q = -\Delta q. \quad (20)$$

Получаем задачу Коши для системы уравнений с начальными условиями (20) или (21). Решая задачу Коши численным методом Рунге – Кутты [6, 7], получаем зависимость

$q(r)$, которая является кривой состояний закрепленного анкерами участка газопровода. Наличие максимума на кривой состояния будет свидетельствовать о потере в данной точке устойчивости рассматриваемого участка газопровода.

Список литературы

1. Айнбиндер А. Б. Расчет магистральных и промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость / А. Б. Айнбиндер. – Москва : Недра, 1991. – 287 с.
2. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н. А. Алфутов. – Москва : Машиностроение, 1991. – 333 с.
3. Быков Л. И. Типовые расчеты при сооружении и ремонте газонефтепроводов / Л. И. Быков, Ф. М. Мустафин, С. К. Рафиков и др. – Санкт-Петербург : Недра, 2006. – 824 с.
4. Колотилов Ю. В. Особенности эффективного использования анкерных устройств при сооружении магистральных газопроводов / Ю. В. Колотилов, А. М. Короленок, Е. И. Федоров и др. – Москва : Нефтяник, 1998. – 86 с.
5. Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем: современные концепции, парадоксы и ошибки / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – Москва : URSS, 2006. – 350 с.
6. Рябенский В. С. Введение в вычислительную математику / В. С. Рябенский. – Москва : Наука, 1994. – 336 с.
7. Светозарова Г. И. Современные методы программирования в примерах и задачах / Г. И. Светозарова, А. В. Козловский, Е. В. Сигитов. – Москва : Наука, 1995. – 427 с.
8. Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П. Е. Товстик. – Москва : Наука, 1995. – 320 с.
9. Черных К. Ф. Общая нелинейная теория упругих оболочек / К. Ф. Черных, С. А. Кабриц, П. Е. Товстик и др. – Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный университет (СПГУ), 2002. – 388 с.

References

1. Aynbinder A. B. *Raschet magistralnykh i promyslovykh truboprovodov na prochnost i ustoychivost* [Calculation of main and field pipelines for strength and stability]. Moscow, Nedra, 1991. 287 p.
2. Alfutov N. A. *Osnovy rascheta na ustoychivost uprugikh sistem* [Bases of calculation for elastic system stability]. Moscow, Machine Building, 1991. 333 p.
3. Bykov L. I., Mustafin F. M., Rafikov S. K. et al. *Tipovye raschety pri sooruzhenii i remonte gazonefteprovodov* [Model calculations at the construction and repair of oil and gas pipelines]. Saint-Petersburg, Nedra, 2006. 824 p.
4. Kolotilov Yu. V., Korolenok A. M., Fedorov Ye. I. et al. *Osobennosti jeffektivnogo ispol'zovaniya ankernykh ustrojstv pri sooruzhenii magistral'nykh gazoprovodov* [Features of effective use of anchors in the construction of main gas pipelines]. Moscow, Oilman, 1998. 86 p.
5. Panovko Ya. G., Gubanova I. I. *Ustoychivost i kolebaniya uprugikh sistem: sovremennye kontseptsii, paradoksy i oshibki* [Stability and vibrations of elastic systems: modern concepts, paradoxes and errors]. Moscow, URSS, 1987. 350 p.
6. Ryabenkiy V. S. *Vvedenie v vychislitel'nuyu matematiku* [Introduction to computational mathematics]. Moscow, Nauka, 1994. 336 p.
7. Svetozarova G. I., Kozlovskiy A. V., Sigitov Ye. V. *Sovremennye metody programmirovaniya v primerakh i zadachakh* [Modern methods of programming in examples and tasks]. Moscow, Nauka, 1995. 427 p.
8. Tovstik P. Ye. *Ustoychivost tonkikh obolochek: asimptoticheskie metody* [Stability of thin shells: asymptotic methods]. Moscow, Nauka, 1995. 320 p.
9. Chernykh K. F., Kabrits S. A., Tovstik P. Ye. et al. *Obshchaya nelineynaya teoriya uprugikh obolochek* [General non-linear theory of elastic shells]. Saint-Petersburg, St. Petersburg State University (SPSU), 2002. 388 p.