

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Н.Т. Курбанов

В статье исследуется распространение нестационарных волн в линейных вязкоупругих материалах для произвольной наследственной функции при малой вязкости с помощью интегрального преобразования Лапласа. Решение задачи получено в виде ряда, оригиналом первого члена которого является решение, полученное методом усреднения; указано влияние последующих членов на решение.

Динамические задачи вязкоупругости, имеющие практическое приложение во многих областях современной техники, технологии и т.п., где используются полимерные материалы с реологическими свойствами, являются важными и особенно сложными. При исследовании этих проблем сталкиваются с двумя различными трудностями. Первая состоит в составлении дифференциального уравнения движения, выбора уравнений состояния среды и определения начальных и краевых условий математической задачи, а вторая, более сложная, в решении задачи.

В данной статье рассматривается одномерная задача о распространении волн в линейном вязкоупругом стержне конечной длины.

Математически задача сводится к решению систем уравнений

$$\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\sigma(x,t) = E \left[e(x,t) - \varepsilon \int_0^t \Gamma(t-\tau) e(x,\tau) d\tau \right] \quad (2)$$

при следующих начальных

$$u(x,t)|_{t=0} = u_0 \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0 \quad (4)$$

и граничных условиях

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (5)$$

где $\sigma(x,t)$ – напряжение, $e(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ – деформация, $u(x,t)$ – перемещение, ρ – плотность, E – модуль Юнга, $\Gamma(t)$ – ядро релаксации, $\varepsilon > 0$ – некоторый малый параметр, l – длина стержня.

Подставляя уравнение состояния (2) в (1) получаем:

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \varepsilon c^2 \int_0^t \Gamma(t-\tau) \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} d\tau \quad (6)$$

Из этого уравнения с помощью метода разделения переменных получаем два независимых уравнения.

$$X''(x) + \left(\frac{\lambda}{c} \right)^2 X(x) = 0 \quad (7)$$

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) - \varepsilon \lambda^2 \int_0^t \Gamma(t-\tau) T(\tau) d\tau = 0 \quad (8)$$

Здесь штрихи показывают производные по аргументам и $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ скорость распространения волны. Решая первое уравнение с граничными условиями (5), находим собственные функции $\{X_k(x)\}$ и собственные числа $\{\lambda_k\}$ данной краевой задачи.

Таким образом, общее решение одномерной задачи линейной вязкоупругости записывается в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t) \quad (9)$$

Здесь $X_k(x)$ – координатные функции, которые не зависят от величины, характеризующей вязкое сопротивление материалов, а функции $T_k(t)$ являются решением интегрально-дифференциального уравнения (8) и удовлетворяют условиям (3) и (4).

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (8) с учётом (3) и (4), получаем:

$$\bar{T}(p) = \frac{pu_0 + v_0}{p^2 + \lambda^2 - \varepsilon \lambda^2 \bar{\Gamma}(p)} \quad (10)$$

где $\bar{T}(p)$ изображение функции $T(t)$ по Лапласу, p – параметр преобразования Лапласа.

При малых значениях времени параметр p является достаточно большим, и, поскольку мы рассматриваем материалы с мгновенной упругостью, изображение ядра релаксации $\bar{\Gamma}(p)$ с увеличением p стремится к нулю. Поэтому для произвольного ε справедливо неравенство

$$\left| \frac{\varepsilon \lambda^2 \bar{\Gamma}(p)}{p^2 + \lambda^2} \right| < 1 \quad (11)$$

Тогда формулу (10) можно представить в виде:

$$\bar{T}(p) = \frac{pu_0 + v_0}{p^2 + \lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon \lambda^2 \bar{\Gamma}(p)}{p^2 + \lambda^2} \right)^n \quad (12)$$

Положим:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon \lambda^2 \bar{\Gamma}(p)}{p^2 + \lambda^2} &= \varepsilon \lambda \int_0^t \sin \lambda(t - \tau) \Gamma(\tau) d\tau = \\ &= \varepsilon \lambda \sin \lambda t \int_0^t \Gamma(\tau) \cos \lambda \tau d\tau - \varepsilon \lambda \cos \lambda t \int_0^t \Gamma(\tau) \sin \lambda \tau d\tau = \\ &= \varepsilon \lambda \sin \lambda t \int_0^{\infty} \Gamma(\tau) \cos \lambda \tau d\tau - \varepsilon \lambda \cos \lambda t \int_0^{\infty} \Gamma(\tau) \sin \lambda \tau d\tau - \\ &- \varepsilon \lambda \sin \lambda t \int_t^{\infty} \Gamma(\tau) \cos \lambda \tau d\tau + \varepsilon \lambda \cos \lambda t \int_t^{\infty} \Gamma(\tau) \sin \lambda \tau d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь, обозначая

$$\Gamma_s = \int_0^{\infty} \Gamma(\tau) \sin \lambda \tau d\tau; \quad \Gamma_c = \int_0^{\infty} \Gamma(\tau) \cos \lambda \tau d\tau \quad (14)$$

$$A(t) = \sin \lambda t \int_t^{\infty} \Gamma(\tau) \cos \lambda \tau d\tau - \cos \lambda t \int_t^{\infty} \Gamma(\tau) \sin \lambda \tau d\tau = \int_t^{\infty} \sin \lambda(t - \tau) \Gamma(\tau) d\tau$$

находим

$$\frac{\varepsilon \lambda^2 \bar{\Gamma}(p)}{p^2 + \lambda^2} = \varepsilon \lambda \Gamma_c \sin \lambda t - \varepsilon \lambda \Gamma_s \cos \lambda t - \varepsilon \lambda A(t) \quad (15)$$

или

$$\frac{\varepsilon \lambda^2 \bar{\Gamma}(p)}{p^2 + \lambda^2} = \frac{\varepsilon \lambda \Gamma_c - \varepsilon \lambda p \Gamma_s - \varepsilon \lambda (p^2 + \lambda^2) \bar{A}(p)}{p^2 + \lambda^2} \quad (16)$$

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учитывая эти формулы в (9) и суммируя ряды, получаем:

$$\bar{T}(p) = \frac{pu_0 + v_0}{\bar{\alpha}(p) - \varepsilon\lambda^2 \bar{\beta}(p)}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(p) &= \left(p + \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_s\lambda\right)^2 + \lambda^2\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)^2 \\ \bar{\beta}(p) &= \bar{\Gamma}(p) + \Gamma_s \frac{p}{\lambda} + \Gamma_c + \frac{\varepsilon}{4}(\Gamma_s^2 + \Gamma_c^2) \end{aligned} \quad (18)$$

Отметим, что если в знаменателе пренебречь членом $\varepsilon\lambda^2 \bar{\beta}(p)$, то получим изображение решения данной задачи, полученное методом усреднения¹. Здесь величина $|\varepsilon\lambda^2 \bar{\beta}(p)|$ будет мала, если выражение

$$A(t) = \int_t^\infty \Gamma(\tau) \sin \lambda(t - \tau) d\tau \quad (19)$$

будет мало; это условие выполняется, если переменная t будет достаточно велика. Поэтому при тех значениях параметра p и, следовательно, времени t можно показать справедливость неравенства

$$\left| \frac{\varepsilon\lambda^2 \bar{\beta}(p)}{\bar{\alpha}(p)} \right| < 1 \quad (20)$$

Тогда равенство (10) можно представить в виде:

$$\bar{T}(p) = \frac{pu_0 + v_0}{\bar{\alpha}(p)} \left[1 + \varepsilon\lambda^2 \frac{\bar{\beta}(p)}{\bar{\alpha}(p)} + \varepsilon^2 \lambda^4 \frac{\bar{\beta}^2(p)}{\bar{\alpha}^2(p)} + K \right] \quad (21)$$

Оригинал первого члена этого ряда определяется в виде:

$$T_1(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_s\lambda t\right) \left[u_0 \cos \lambda\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)t + \frac{v_0 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_s\lambda}{\lambda\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)} \sin \lambda\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)t \right] \quad (22)$$

Эта формула является решением поставленной задачи, полученное методом усреднения².

Для нахождения второго приближения представим её в виде:

$$T_2(t) = \varepsilon\lambda^2 T_1(t) * L^{-1} \left\{ \frac{\bar{\beta}(p)}{\bar{\alpha}(p)} \right\} \quad (23)$$

Здесь звёздочка обозначает свёртку функций

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \quad (24)$$

(L^{-1} – оператор обратного преобразования Лапласа).

Теперь определим оригинал правой части уравнения (23). С этой целью отношение $\frac{\bar{\beta}(p)}{\bar{\alpha}(p)}$ представим в виде:

$$\frac{\bar{\beta}(p)}{\bar{\alpha}(p)} = \frac{\bar{\Gamma}(p)}{\bar{\alpha}(p)} + \frac{\Gamma_s}{\lambda} \frac{p + d}{\bar{\alpha}(p)} \quad (25)$$

где

$$d = \frac{\Gamma_c}{\Gamma_s} \lambda + \frac{\varepsilon\lambda}{4\Gamma_s} (\Gamma_s^2 + \Gamma_c^2) \quad (26)$$

Тогда отсюда находим:

$$L^{-1}\left\{\frac{\bar{B}(p)}{\bar{\alpha}(p)}\right\} = \Gamma(t) * \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\Gamma_s \lambda t\right) \frac{\sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_s\right)t}{\lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_s\right)} + \frac{\Gamma_s}{\lambda} \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_s \lambda t\right) \times$$

$$\times \left[\cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_s\right)t + \frac{d - \frac{\varepsilon}{2}\Gamma_s \lambda}{\lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)} \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)t \right] \quad (27)$$

Нахождение оригиналов следующих членов ряда (21) также не представляет трудности.

Для вычисления влияния члена (23) на решение

$$T(t) = T_1(t) + T_2(t) \quad (28)$$

рассмотрим ядро Ржаницына, которое представляется в виде:

$$\Gamma(t) = \varepsilon t^{\alpha-1} \exp(-\beta t), \quad (29)$$

где $0 < \alpha < 1$, β – постоянная, ε – некоторый малый параметр. Для этого ядра из формулы (23) находим

$$T_2(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\lambda\Gamma_s t\right) \left\{ \left[\frac{\varepsilon A_1}{2} \cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)t + \frac{\varepsilon A_4}{2} \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)t \right] \times \right.$$

$$\times \int_0^t e^{-\beta\tau} \tau^{\alpha-1} \sin 2\lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right) d\tau + \left[\frac{\varepsilon A_1}{2} \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)t - \frac{\varepsilon A_4}{2} \cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)t \right] \times$$

$$\times \int_0^t e^{-\beta\tau} \tau^{\alpha-1} d\tau - \left[\frac{\varepsilon A_1}{2} \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)t - \frac{\varepsilon A_4}{2} \cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)t \right] \times$$

$$\times \int_0^t e^{-\beta\tau} \tau^{\alpha-1} \cos 2\lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right) d\tau + \frac{t}{2} (A_2 - A_6) \cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)t +$$

$$\left. + \left[\frac{A_2 + A_6}{2\lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)} + \frac{t}{2} (A_3 + A_5) \right] \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c\right)t \right\} \quad (30)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера.

$$\Gamma_s = \varepsilon \Gamma(\alpha) (\beta^2 + \lambda^2)^{-\alpha/2} \sin \left[\alpha \arctg \left(\frac{\lambda}{\beta} \right) \right] \quad (31)$$

$$\Gamma_c = \varepsilon \Gamma(\alpha) (\beta^2 + \lambda^2)^{-\alpha/2} \cos \left[\alpha \arctg \left(\frac{\lambda}{\beta} \right) \right] \quad (32)$$

$$A_1 = \frac{\varepsilon \lambda u_0}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c}; \quad A_2 = \varepsilon \lambda u_0 \Gamma_s; \quad A_3 = \frac{\varepsilon \Gamma_s u_0 \left(d - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_s \lambda \right)}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c}; \quad (33)$$

$$A_4 = \frac{\varepsilon \left(v_0 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_s u_0 \right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c \right)^2}; \quad A_5 = \frac{\varepsilon \Gamma_s \left(v_0 - \frac{1}{2}\varepsilon\lambda u_0 \Gamma_s \right)}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c} \quad (34)$$

$$A_6 = \frac{\varepsilon \Gamma_s \left(v_0 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_s u_0 \right) \left(d - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_s \lambda \right)}{\lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\Gamma_c \right)^2} \quad (35)$$

Выражение $T_1(t)$, представленное формулой (22), не меняет свой вид, но Γ_s и Γ_c для ядра Ржаницына выражаются вышеуказанными формулами. Интегралы, входящие в выражение $T_2(t)$, для конкретного материала полипропилена вычислены приближенными мето-

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

дами, и построены графики функций $T_1(t)$ и $T_2(t)$ при следующих значениях параметров $\alpha, \beta, \varepsilon, \lambda, u_0$ и v_0 : $\alpha=0,1$; $\beta=0,05$; $\varepsilon=0,0925$; $\lambda=1$.

Причем на рисунке 1 приняты $u_0=0, v_0=1$; на рисунке 2 $u_0=1, v_0=0$.

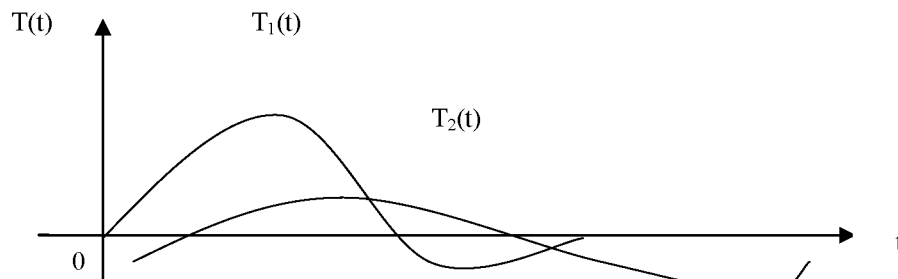


Рис. 1. Графики функции $T_1(t)$ и $T_2(t)$ при $u_0=0, v_0=1, \lambda=1$ для полипропилена

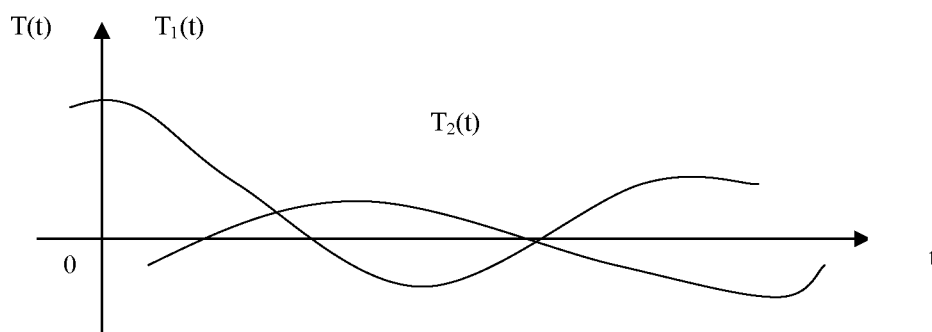


Рис. 2. Графики функции $T_1(t)$ и $T_2(t)$ при $u_0=1, v_0=0, \lambda=1$ для полипропилена

Из рисунков видно, что учет последующих членов ряда улучшает точность решения, так как при низких значениях частоты погрешность мала, а с увеличением частоты она увеличивается, причем амплитуды всех членов ряда с течением времени уменьшаются по экспоненциальному закону, а фазы сдвинуты.

¹ *Ильюшин А.А., Ларионов Г.С., Филатов А.Н.* К усреднению в системах интегро-дифференциального уравнения // ДАН СССР. 1969. Т. 188, № 1.

² *Ларионов Г.С.* Исследование колебаний релаксирующих систем методом усреднения // Механика полимеров. 1969. № 5.

УДК 658.713

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ К ВЫБОРУ ПОСТАВЩИКА ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕССА «ЗАКУПКИ» СИСТЕМЫ МЕНЕДЖМЕНТА КАЧЕСТВА

Д.В. Кутузов, Е.П. Быкова

В статье описано приложение метода анализа иерархий к оптимальному выбору поставщика. В работе сформирован список критериев, на основании которых производится выбор. На примере выбора из трех альтернатив показан алгоритм принятия наилучшего много-