УДК 004.9

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОФАЗНОГО БИЗНЕС-ПРОЦЕССА ОБСЛУЖИВАНИЯ ПАЦИЕНТОВ В МЕДИЦИНСКОМ УЧРЕЖДЕНИИ

***М.А. Храмкова***

*В статье представлена и рассмотрена параллельно-последовательная схема системы массового обслуживания на примере анализа работы медицинского учреждения. Процесс времени обслуживания описан с помощью определенного закона распределения на основе статистического анализа. Одновременно с процессом разряжения потоков согласно теореме Гнеденко производится другой процесс – изменение масштаба времени: за единицу масштаба считается промежуток длины.*

***Ключевые слова:*** *система массового обслуживания, обслуживающие устройства, процесс времени обслуживания, первичные и вторичные потоки.*

***Key words:*** *queuing system, servicers, the process of time of service, primary and secondary streams.*

За последние десятилетия в самых различных областях практики возникла необходимость в решении вероятностных задач, связанных с работой систем массового обслуживания (СМО), так как они способны реально описать различные стохастические (заранее не определенные, но описываемые вероятностными функциями) процессы. Задача теории СМО полностью описывается тремя показателями:

- входящими потоками заявок (функциями плотностей распределения временных интервалов поступления заявок);
- структурой и информацией об обслуживающих устройствах (функциями плотностей распределения времени обслуживания заявок в устройствах и возможными связями между ними);
- дисциплиной обслуживания заявок. [1, с. 250].

Однако во всех задачах СМО, к сожалению, не учитывается время длительности заявки и время обработки заявки, обычно предполагается, что одна из этих величин описывается дельта-функцией. Но в каждой логистической задаче заявка обладает некоторым весом, а обслуживающее устройство обладает некой производительностью, и, в свою очередь, заявка считается обслуженной, если узел СМО произведет работу по разгрузке или удовлетворению данной заявки. Математически это определяется интегралом свертки от веса заявки и производительности узла СМО, следовательно, среднее время обслуживания узлом СМО тоже определяется из интеграла свертки, что требует дополнительного анализа систем массового обслуживания. Поток заявок в данном случае будем описывать в следующей форме:

$$\zeta_n(t) = \sum_{i=1}^{n} F\,(t - t_i, \Theta_i) \qquad (1),$$

где первый аргумент характеризует случайный поток заявок с функцией распределения интервалов между ними равной *f(t)*, а $\Theta_i$ – время длительности i-ой заявки, в общем случае описываемой *k(t)* – функцией распределения длительности заявок. Рассмотрим параллельно-последовательную схему систему массового обслуживания на примере анализа работы медицинского кабинета. В медицинском учреждении пациент после получения медицинской карточки в регистратуре направляется в смотровой кабинет. Врач-терапевт направляет пациент, в зависимости от предварительного диагноза к профильному специалисту: кардиологу, неврологу, хирургу или др. [2, с. 571]. Профильный специалист в зависимости от тяжести заболевания, во-первых, направляет пациента на необходимые анализы для уточнения диагноза и, во-вторых, назначает дополнительные сеансы лечения, формируя тем самым вторичный поток посетителей. Таким образом, в медицинском учреждении формируется параллельно-последовательная система обслуживания пациентов, состоящая из первичного потока пациентов и вторичного потока больных. На рис. представлена схема параллельно-последовательной системы обслуживания пациентов в медицинском учреждении.

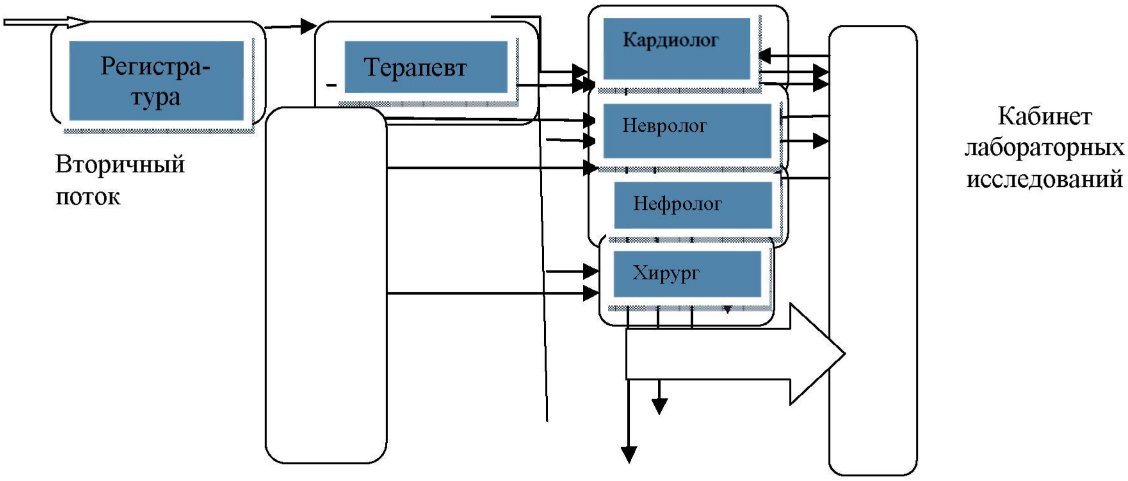


Рис. Схема обслуживания пациентов в медицинском учреждении

Пусть на вход системы обслуживания – в регистратуру – поступает первичный поток пациентов – $\zeta_n(t)$, распределение интервалов между ними описывается функцией – $f(t)$. Время обслуживания пациентов в регистратуре характеризуется плотностью распределения – $q_p(t)$, пациенты для заполнения медицинской карточки излагают свое имя, отчество, фамилию, адрес, телефон и полис медицинского страхования, затрачивая время – $\Theta_p$, которое в зависимости от возраста пациента может варьироваться от одного посетителя к другому, с функцией распределения длительности изложения данных – $k(t)$.

В общем случае, случайные величины: длительность изложения личных данных и время их обслуживания в регистратуре – независимы. Тогда общая плотность распределения функции обслуживания пациента после регистратуры $k_p(t)$ будет определяться интегралом свертки от распределения длительность изложения их личных данных и плотностью распределений функции обслуживания в регистратуре [2, с. 571]

$$k_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_p(\tau)k(t-\tau)d\tau \qquad (1.2)$$

или в символьной форме

$$k_p(t) = g_p(t)\odot k(t) \qquad (1.3),$$

где $\odot$ – оператор свертки (который коммутативен и ассоциативен) и обозначен точкой, заключенной в кружок.

Применяя операцию преобразования Лапласа к интегралу свертки, получим

$$K_p(s) = G_p(s) \cdot K(s) \quad (1.4),$$

где

$$G_p(s) = \int_0^{\infty} g_p(t) e^{-st} dt,$$

$$K(s) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-st} dt$$

преобразования Лапласа, далее будем обозначать через $g_p(t)$, $k(t)$,… оригиналы и через $G(s), K(s), \ldots$ – их изображения Лапласа. Таким образом, свертка оригиналов функций равносильна умножению изображений. Применяя к соотношению (1.4) обратное преобразование Лапласа, получим искомое распределение

$$k_p(t) = \int_0^{\infty} K_p(s) e^{st} ds \quad (1.5)$$

Причем важно подчеркнуть, что среднее время обслуживания пациентов в регистратуре равно

$$T_p = -\frac{dK_p(s)}{ds}\bigg|_{s=0} = -\frac{d\left(K(s) \cdot G_p(s)\right)}{ds}\Bigg|_{s=0} \quad (1.6),$$

а средний интервал обращения пациентов в регистратуру равен

$$T = -\frac{dF(s)}{ds}\bigg|_{s=0} \quad (1.7).$$

Здесь $F(s)$ – изображение Лапласа от оригинала $f(t)$ – функция распределения интервалов между пациентов. Хотя средний интервал обращения пациентов можно найти непосредственно через функцию распределения интервалов между пациентов

$$T = \int_0^{\infty} t \cdot f(t)\, dt.$$

Отсюда нетрудно получить формулу для расчета вероятности задержки обслуживания пациента при получении медицинской карточке в регистратуре, если следующий пациент подойдет к регистратуре, когда еще обслуживается предыдущий, то подошедший пациент встанет в очередь, тогда вероятность образования очереди равна [3, с. 678]

$$p_p = \int_0^{T_{op}} f(t)\, dt \quad (1.8),$$

где верхний предел интеграла определяется временем – $T_{op}$, получающимся из нормирования функции распределения следования пациентов после прохождения регистратуры. Функция распределения следования пациентов после регистратуры будет определяться сшивкой двух функций: функцией распределения интервалов между пациентов до регистратуры, определенной от до $\infty$ , т.е. той частью функции $f(t)$ следования пациентов в регистратуру, на которую не влияет среднее время задержки или обслуживания пациентов в регистратуре, и частью функции, описывающей обслуживание пациентов в регистратуре $k_{\text{р}}(t)$, но ограниченной снизу временем $T_{op}$, показывающим, что частые интервалы следования пациентов будут ограничены временем обслуживания в регистратуре

$$\int_{T_{op}}^{T_p} k_{\text{р}}(t)\,dt + \int_{T_p}^{\infty} f(t)\,dt = 1 \tag{1.9}$$

Тогда время нахождения пациента в очереди перед регистратурой будет равно

$$t_p = \int_0^{T_{op}} t \cdot f(t)\,dt \tag{1.10}$$

Поток зарегистрированных пациентов направляется в смотровой кабинет, естественно предположить, что распределение интервалов следования зарегистрированных пациентов не будет зависеть от времени обслуживания врачом смотрового кабинета, которое определятся квалификацией и опытом врача. Средний интервал следования пациентов в смотровой кабинет будет равен

$$T_{p\to c} = \int_{T_{op}}^{T_p} t \cdot k_{\text{р}}(t)\,dt + \int_{T_p}^{\infty} t \cdot f(t)\,dt \tag{1.11}$$

Пусть время обслуживания пациента врачом смотрового кабинета описывается плотностью распределения $g_c(t)$. Тогда в силу независимости распределений обслуживание пациентов для постановки предварительного диагноза, т.е. время обслуживания в смотровом кабинете, определятся интегралом свертки и равно

$$k_c(t) = g_c(t) \odot k(t) \tag{1.12}$$

или его изображение

$$K_c(s) = G_c(s) \cdot K(s) \tag{1.13}$$

Применяя к соотношению (1.13) обратное преобразование Лапласа, получим искомое распределение

$$k_c(t) = \int_0^{\infty} K_c(s) e^{st} ds \tag{1.14}$$

Отсюда нетрудно найти среднее время обслуживания пациентов в смотровом кабинете

$$\text{Т}_{\text{с.}} = -\left.\frac{dK_c(s)}{ds}\right|_{s=0} = -\left.\frac{d[G_c(s) \cdot K(s)]}{ds}\right|_{s=0} \tag{1.15}$$

Вероятность задержки пациента перед смотровым кабинетом или вероятность того, что пациент встанет в очередь перед смотровым кабинетом, по аналогии с выводом соотношений (1.8) – (1.10) равна

$$p_c = \int_{T_{op}}^{T_{oc}} \{k_{\text{р}}(t) + f(t)\}dt \tag{1.16}$$

Время нахождения пациента в очереди перед смотровым кабинетом будет равно

$$t_c = \int_{T_{op}}^{T_{oc}} t \cdot \{k_p(t) + f(t)\} dt \qquad (1.17)$$

где $T_{oc}$ определяется из условия нормировки функции распределения интервалов следования пациентов с предварительным диагнозом из смотрового кабинета

$$\int_{T_{oc}}^{T_c} k_c(t)\, dt + \int_{T_c}^{\infty} f(t)\, dt = 1 \qquad (1.18),$$

а средний интервал следования пациентов из смотрового кабинета будет равен

$$T_{c\rightarrow} = \int_{T_{oc}}^{T_c} t \cdot k_c(t)\, dt + \int_{T_c}^{\infty} t \cdot f(t)\, dt \qquad (1.19)$$

Функция распределения интервалов следования пациентов из смотрового кабинета будет иметь следующий вид [4, с. 400]

$$f_{c\rightarrow}(t) = \begin{vmatrix} k_c(t) & if & T_{oc} < t \le T_c \\ f(t) & if & T_c < t < \infty \end{vmatrix} \qquad (1.20).$$

Кратко остановимся на предварительном диагнозе. Поток пациентов, обратившихся в медицинское учреждение, имеет спектр заболеваний, описывающейся функцией $Z(n)$. Характер предварительного диагноза имеет дискретное распределение. Врач-терапевт распределяет пациентов, например, с урологическими заболеваниями к нефрологу с вероятностью – $p_{неф.}$, к кардиологу с вероятностью – $p_{кар.}$, к хирургу с вероятностью – $p_{хир.}$ и к неврологу с вероятностью – $p_{нев.}$. Таким образом, врач-терапевт подвергает первичный поток пациентов операции разряжения. Каждый пациент с вероятностью $p_i$ направляется в соответствующий профильный кабинет, а с вероятностями $q_i = 1 - p_i$ направляются в другие кабинеты. Назовем описанное преобразование преобразованием $\Theta_p$. Согласно теореме Гнеденко [4] для редеющих потоков соответствующее преобразование имеет вид

$$\Theta_{p_i} F_{c\rightarrow}(s) = \frac{p_i \cdot F_{c\rightarrow}(p_i s)}{1 - q_i \cdot F_{c\rightarrow}(p_i s)} \qquad (1.21).$$

Здесь $F_{c\rightarrow}(p_i s)$ изображение Лапласа от оригинала $f_{c\rightarrow}\left(\frac{t}{p_i}\right)$. Согласно теореме подобия [3] данное изображение Лапласа имеет вид

$$f_{c\rightarrow}\left(\frac{t}{p_i}\right) \div p_i \cdot F_{c\rightarrow}(p_i s)$$

Одновременно с процессом разряжения производится другой процесс – изменение масштаба времени: за единицу масштаба считается промежуток длины $p_i^{-1}$. Отсюда нетрудно получить выражение для среднего интервала между пациентами первичного потока, направляемыми в специализированные кабинеты

$$T_{c.p_i} = -\frac{d\Theta_{p_i} F_{c\rightarrow}(s)}{p_i\, ds}\bigg|_{s=0} \qquad (1.22).$$

Отметим, что в данное соотношение в отличие от формулы (1.7) входит масштабирующий множитель $p_i^{-1}$, учитывающий изменение масштаба времени при разряжении потока пациентов.

Одновременно с потоком первичных пациентов к профильному специалисту направляется и вторичный поток больных, продолжающий лечение, с функцией распределения интервалов между ними равной $f_{вт.i}(t)$. Потоки пациентов объединяются и направляются на прием к профильному специалисту. Для объединенного потока $H_{об.i}(t)$ дополнительная функция интегрального распределения равна произведению дополнительных функций интегральных распределений входящих потоков $H_{вт.i}(t)$ и $H_{c\rightarrow}\left(\frac{t}{p_i}\right)$ [5] и для i-ого специалиста равна

$$H_{об.i}(t) = \prod_{i=1}^{k} H_i(t) = H_{вт.i}(t) \cdot H_{c}\left(\frac{t}{p_i}\right) \qquad (1.23).$$

Тогда интегральная функция распределения объединенного потока пациентов, направляющихся на прием к i-ому специалисту, равна

$$F_{об.i}(t) = 1 - H_{об.i}(t) \qquad (1.24),$$

а соответствующая плотность распределения объединенного потока пациентов соответственно распределена по закону

$$f_{об.i}(t) = \frac{dF_{об.i}(t)}{dt} = \frac{dH_{об.i}(t)}{dt} \qquad (1.25).$$

Пусть время обслуживания пациента *i*-м профильным специалистом описывается плотностью распределения – $g_i(t)$. Тогда аналогично выводу соотношений от (1.12) до (1.18) получим следующие результаты.

Для среднего времени обслуживания пациентов i-ым профильным специалистом где

$$k_i(t) = g_i(t) \odot k(t) \qquad (1.27),$$

или для их изображений

$$K_i(s) = G_i(s) \cdot K(s) \qquad (1.28).$$

Вероятность задержки пациента перед кабинетом профильного специалиста

$$p_{c.i} = \int_0^{T_{o.i}} \{k_i(t) + f_{об.i}(t)\}\, dt \qquad (1.29),$$

здесь нижний предел интегрирования равен 0, что вызвано вторичным потоком пациентов, в котором могут наблюдаться интервалы прихода к врачу, близкие к нулю. Верхний предел интегрирования находится из условия равенства единице плотности распределения освобождения кабинета профильного врача

$$\int_{T_{o.i}}^{T_i} k_i(t)\, dt + \int_{T_i}^{\infty} f_{об.i}(t)\, dt = 1 \qquad (1.30)$$

Время ожидания пациентом приема профильного врача определяется соотношением [5, с. 432]

$$t_i = \int_0^{T_i} t \cdot k_i(t)\, dt + \int_{T_i}^{\infty} t \cdot f_{об.i}(t)\, dt \qquad (1.31).$$

**Библиографический список**

1. ***Вентцель Е. С.*** Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : ARADEMIA, 2003. – С. 571.
2. ***Гнеденко Б. В.*** Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – М. : Изд-во ЛКИ, 2007. – С. 400.
3. ***Клейнрок Л.*** Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М. : Машиностроение, 1979. – 432 с.
4. ***Лаврентьев М. А.*** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Гос изд-во физ.-мат. лит., 1958. – С. 678.
5. ***Таранцев А. А.*** Инженерные методы теории массового обслуживания / А. А. Таранцев. – СПб. : Наука, 2007. – С. 250.