

36. Risto F., Pupillometry. The Psychology of the Pupillary Response (Book). *Journal of Personality Assessment*, 1980, vol. 44, no. 4, pp. 441–444.
37. Schaffer J. D., Whitley L., Eshelman J. Combinations of Genetic Algorithms and Neural Networks: A Survey of the State of the Art. *Proceedings of International Workshop on Combinations of Genetic Algorithms and Neural Networks. COGANN-92*. 1992, pp. 1–37.
38. Steffen S. *Merkmale und Hintergründe der pathologischen Internetnutzung: Dissertation* [Features and Background of Pathological Internet Use: Dissertation]. Tübingen (Germany), 2012, 131 с.
39. Whitley D. Applying genetic algorithms to neural network learning. *Proceedings of the Seventh Conference of the Society of Artificial Intelligence and Simulation of Behavior*. Sussex, England, Pitman Publ., 1989, pp. 137–144.
40. Whitley D., Starkweather T., Bogart C. Genetic algorithms and neural networks. *Optimizing connections and connectivity, Parallel Computing*. 1990, no. 14, pp. 347–361.

УДК 515.162.8+004.942

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА КОМПОНЕНТ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УЗЛОВ, ИСПОЛЪЗУЕМЫХ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ РАЗЛИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

Статья поступила в редакцию 27.03.2018, в окончательном варианте – 12.06.2018.

Сячина Евгения Ильинична, Астраханский государственный университет, 414056, Российская Федерация, г. Астрахань, ул. Татищева, 20а,
ассистент, e-mail: eanyushina@yandex.ru

Теория узлов применяется для решения задач в различных науках, в том числе нематематических. При этом узел может быть математической моделью многих объектов и явлений окружающего мира. В свою очередь для моделей, использующих связанные тем или иным образом узлы (включая графовые модели), может осуществляться компьютерное моделирование. В настоящее время некоторые вопросы теории узлов требуют дополнительного исследования (анализа). В данной работе подробно изложен разработанный нами метод определения количества компонент для произвольного рационального зацепления с помощью движений Рейдемейстера для d-диаграмм. Введено понятие свободных рациональных зацеплений. Сформулированы определения основных понятий. Доказано утверждение, на котором основан предлагаемый метод. При использовании этого метода нет необходимости строить не только обычную диаграмму зацепления, но и соответствующую ему d-диаграмму. Достаточно знать лишь, как задается свободное рациональное зацепление в виде $R^*(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots)$. Рассмотрены некоторые частные вопросы реализации предлагаемых алгоритмов при проведении компьютерного моделирования.

Ключевые слова: узел, свойства узла, зацепление, математическая модель, компьютерное моделирование, диаграмма, четырехвалентный граф, хорда, рациональные узлы, рациональные зацепления, свободное рациональное зацепление, компоненты узлов

ALGORITHM TO IDENTIFY THE NUMBER OF COMPONENTS OF SOME KINDS OF KNOTS IN MATHEMATICAL MODELING OF VARIOUS PROCESSES

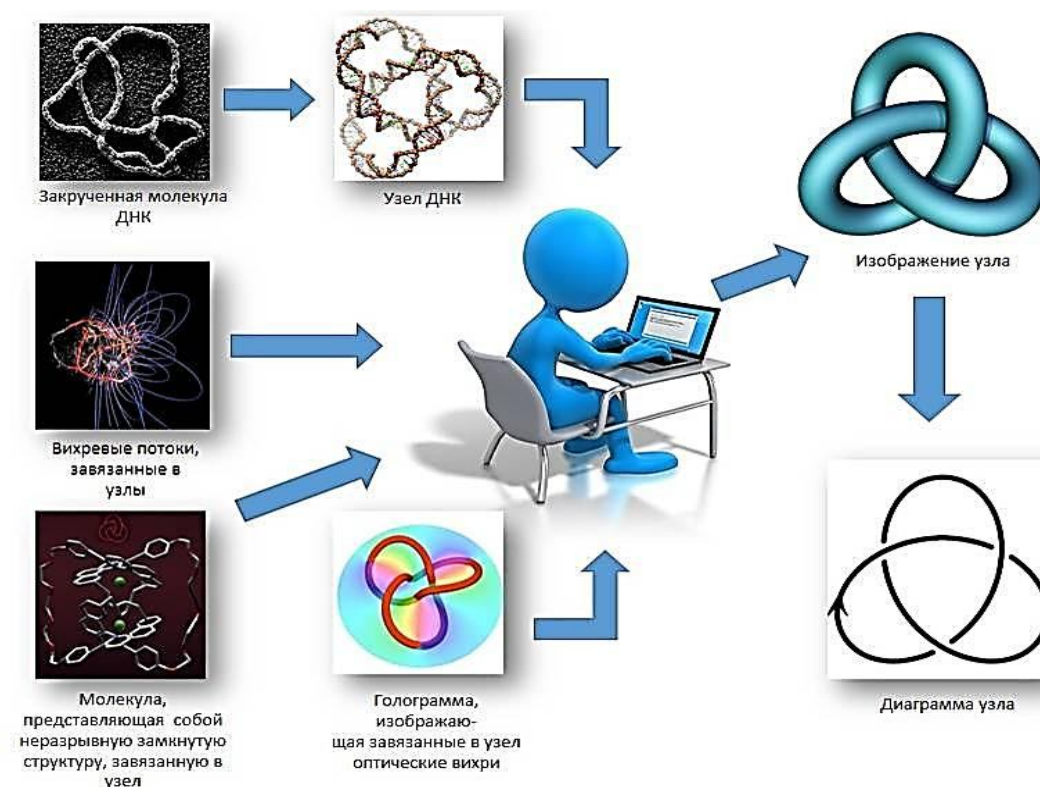
The article was received by editorial board on 27.03.2018, in the final version – 12.06.2018.

Syachina Evgeniya I., Astrakhan State University, 20a Tatishchev St., Astrakhan, 414056, Russian Federation,
Assistant Professor, e-mail: eanyushina@yandex.ru

Theory of knots serves to solve problems of various sciences, including non-mathematical ones, as knot can be a mathematical model of numerous objects and phenomena of the World around. In its turn, computer modeling can be carried out for models employing knots (including graph models) interrelated in one way or another. Nowadays some issues of the theory of knots require additional research (analysis). This work in detail shows the method worked out by the author that is aimed to identify the number of components for an optional rational linkage with the help of Reidemeister move for d-diagrams. The notion of free rational linkages has been introduced. Definitions of basic terms have been formulated. The statement that is a ground for the method in question has been proved. This method employed, there is need to make up neither a regular linkage diagram, nor a corresponding d-diagram. The only thing required is to know how to set a free rational linkage of the type $R^*(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots)$. Some particular issues of realization of the algorithms suggested in computer modeling have been considered.

Keywords: knot, knot properties, linkage, mathematical model, computer modeling, diagram, quadrivalent graph, chord, rational knots, rational linkages, free rational linkage, components of knots

Графическая аннотация (Graphical annotation)



Введение. Несмотря на важность теории узлов и наличие у нее достаточно многочисленных приложений в различных видах научных исследований, отдельные вопросы указанной теории остаются исследованными в литературе недостаточно полно. Поэтому целями данной работы были следующие:

1. Разработка методики, позволяющей классифицировать некоторые виды узлов.
2. Разработка (на основе этой классификации) алгоритма определения количества компонент для произвольного рационального (т.е. имеющего одну либо две компоненты) зацепления.
3. Анализ некоторых частных вопросов компьютерной реализации алгоритма.

Общая характеристика проблематики работы. Под *узлом* в математике понимают некоторую абстрактную, замкнутую ориентированную гладкую кривую в R^3 . Помимо узлов существует понятие «зацепление» – это конечный набор замкнутых непересекающихся ориентированных кривых в пространстве. Таким образом, узел может рассматриваться как частный случай зацепления. Теория узлов стала успешно развиваться в конце прошлого века вместе с развитием *топологии* [8, 13]. Теория узлов может использоваться при решении широкого класса задач. В качестве примеров приведем моделирование различных процессов в физике, химии (для описания структуры химических элементов), генетике и т.д. В гидродинамике объект «узел» используется для моделирования устойчивых вихрей. В сфере исследования ферромагнетизма узел используется для описания математических моделей потоков магнитных полей [3, 7].

В 2008 г. американские физики доказали, что свет может двигаться по «запутанным» замкнутым траекториям. Математической моделью этого явления также является узел [17]. Наиболее широкое применение теория узлов нашла в генетике для моделирования зацепления нитей молекул ДНК [15, 16]. Двойная спираль ДНК закручена, поэтому математическое моделирование молекулы ДНК с помощью подходов из области теории узлов способствует решению проблемы исследования ее структуры [4, 14].

Одной из главных задач теории узлов (помимо их классификации) является построение эффективных алгоритмов развязывания (раскручивания) узла, а для зацеплений важно определение количества их компонент [5].

Большое значение имеет также использование компьютерных методов для решения задач теории узлов.

Постановка задачи и подходы к ее решению. Проблемы классификации узлов и определения количества компонент для произвольного рационального (имеющего одну либо две компоненты) зацепления уже частично рассмотрены в литературе. Так, Кауфманом [18] проблема классификации узлов решалась на основе построения d -диаграмм в работе. Однако им не было предложено методики определения того, при каком именно количестве хорд в d -диаграмме рационального зацепления (т.е. фактически какому именно рациональному зацеплению) соответствует установленное количество компонент. Как

будет показано ниже, для решения данной задачи целесообразно применить синтез подхода, основанного на d -диаграммах, и метода движений Рейдемейстера [6].

d -Диаграммы рациональных узлов (зацеплений). Узлы (зацепления) можно задавать с помощью диаграмм в виде проекций узла (зацепления) на плоскость, при которых кривая самопересекается только в изолированных двойных точках. Разрывы линий показывают, какая из ветвей проходит ниже. Линия, идущая ниже, называется проходом, а идущая выше – переходом (рис. 1) [10].



Рисунок 1 – Диаграмма узла.

Эту диаграмму можно рассматривать как четырехвалентный граф, вложенный в плоскость, у которого двойные точки – вершины графа, а соединяющие их дуги – ребра графа.

Помимо таких «плоских» диаграмм существуют d -диаграммы, которые представляют собой окружность на плоскости вместе с двумя семействами хорд. При этом хорды каждого семейства между собой не пересекаются. По d -диаграмме узел может быть однозначно восстановлен. Связь узлов и d -диаграмм описана в [6].

Среди всевозможных узлов и зацеплений особую роль играют так называемые *рациональные узлы*. Данное понятие введено Л. Кауфманом и подобные узлы подробно рассмотрены им в [18]. Удобнее всего дать определение рационального узла, используя понятие «плеть» [9].

Рациональные узлы будем обозначать $R(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots)$, где n_i , $i = 1, 2, 3, \dots, k, \dots$, – плеть, с количеством перекрестков $n_i + 1$. Каждый рациональный узел следующего шага получается из предыдущего добавлением плети следующим образом: на нечетном шаге плеть добавляется горизонтально, на четном – вертикально [2].

d -Диаграммы простейших рациональных узлов вида $R(0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ или R_k , где k – количество хорд в d -диаграмме узла [1], представляют собой d -диаграммы, в которых первая хорда пересекается только со второй хордой, вторая – только с третьей и первой, третья – со второй и четвертой и т.д. Иными словами, каждая i -ая хорда пересекается $(i+1)$ -ой и $(i-1)$ -ой, а последняя k -ая хорда пересекается только с $(k-1)$ -ой.

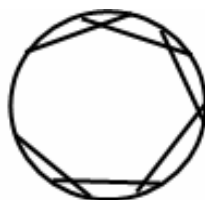


Рисунок 2 – d -Диаграмма рационального узла $R_k, k = 6$

d -Диаграммы рациональных узлов вида $R(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots)$ связаны с d -диаграммами узлов R_k . Они представляют собой d -диаграммы рациональных узлов R_k , в которых к любой основной i -ой хорде добавляется некоторое количество малых хорд, пересекающих ее в малой окрестности ее конца (все равно какого) [6]. В обычной диаграмме таких узлов плеть n_i , $i = 1, 2, 3, \dots, k, \dots$, с количеством перекрестков $n_i + 1$ соответствует n_i – количеству малых хорд в d -диаграмме.



Рисунок 3 – d -Диаграмма рационального узла $R(3, 2, 4)$

В дальнейшем тексте термин «узел» будет рассматриваться как обобщенный и означать либо собственно узел, либо зацепление.

Отметим, что представленное описание объекта «узел» является значительно более сложным по сравнению с тем, что используется в графовых моделях, например при реализации компьютерных алгоритмов поиска в «глубину» и «ширину». В такого рода задачах узел – это обычно просто некоторый объект, содержащий связи с другими узлами или с самим собой (связи типа петель).

Таким образом, вопросы компьютерной реализации описываемых в статье объектов типа «узел» нуждаются в специальной разработке: как с точки зрения хранения информации, так и организации ее обработки. Это касается, в частности, представления информации о хордах.

Движения Рейдемейстера. В данной статье рассматривается метод определения количества компонент в рациональных зацеплениях с помощью движений Рейдемейстера для d -диаграмм и так называемых свободных зацеплений, о которых будет сказано ниже.

Теорема (Рейдемейстера). Два узла эквивалентны тогда и только тогда, когда от диаграммы одного узла к диаграмме другого можно перейти с помощью конечного числа операций $\Omega_1^{\pm}$, $\Omega_2^{\pm}$, Ω_3 [12]. На рисунке 4 рассматриваемые движения показаны на d -диаграммах.

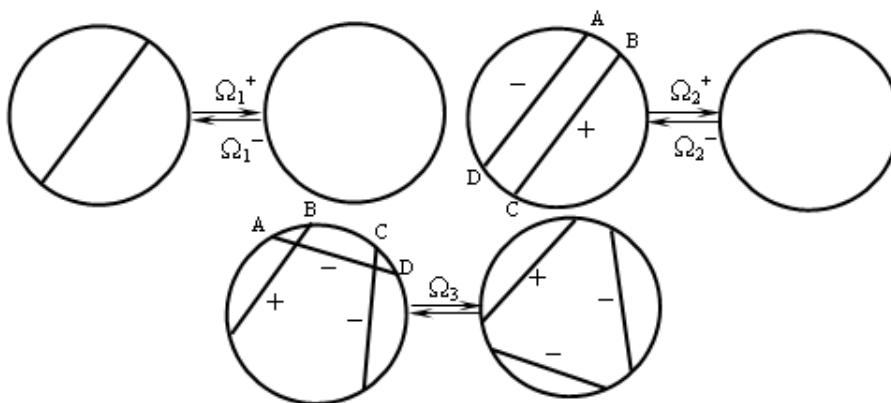


Рисунок 4 – Операции Рейдемейстера для d -диаграмм

Особенность второго и третьего движений Рейдемейстера состоит в следующем: на дугах AB и DC в диаграмме для второго движения и на дугах AB, BC и CD в диаграмме для третьего движения не должно быть никаких вершин.

Замечание. Легко убедиться в том, что d -диаграмма, в которой одна из хорд пересечена малой хордой в окрестности одной из ее вершин, эквивалентна d -диаграмме, в которой эта же хорда пересечена малой хордой в окрестности другой ее вершины. Поэтому малую хорду можно перенести из окрестности одного конца пересекаемой хорды в окрестность другого. Обозначим эту операцию через Ω .

Свободные рациональные зацепления. Введем понятие свободного зацепления. Оно связано с такими понятиями, как «зацепление», «диаграммы», « d -диаграммы»; «движения Рейдемейстера». Будем обозначать свободные рациональные зацепления через $R^*(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots)$.

Основное отличие свободных зацеплений от обычных заключается в том, что на диаграммах, соответствующих свободным зацеплениям, не соблюдается соотношение «проход – переход», т.е. не показано, какая из ветвей проходит ниже, а какая выше. Следовательно, на d -диаграммах хордам не присваивается какой-либо из знаков (плюс или минус) [1]. Таким образом, свободное зацепление – это четырехвалентный граф, вложенный в плоскость. То есть проекция на плоскость зацепления есть свободное зацепление. Если классический узел (или зацепление) огрубить до свободного, то классификация узлов (зацеплений) состоит в вычислении количества компонент зацепления. Свободное зацепление также может быть задано d -диаграммой.

Свободные зацепления, а именно четырехвалентные графы, эквивалентны по трем движениям, аналогичным движениям Рейдемейстера для d -диаграмм зацеплений (узлов). Обозначим эти три движения через $(*)$. В то же время для каждого из движений оставим прежние обозначения: $\Omega_1^{\pm}$, $\Omega_2^{\pm}$, Ω_3 .

Следуя сформулированному выше замечанию, в настоящей работе будем рассматривать d -диаграммы свободных рациональных зацеплений, в которых каждая основная хорда пересекается n_i числом малых хорд в окрестности ее начала. Началами основных хорд условимся считать первые достигаемые вершины этих хорд, лежащие на окружности d -диаграммы, при совершении по ней обхода по

часовой стрелке. Например, на d -диаграмме свободного зацепления R_5 , изображенного на рисунке 5, началами основных хорд являются вершины M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 .

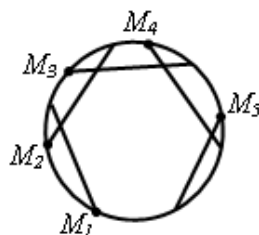


Рисунок 5 – Начала основных хорд

Совокупность хорд, представленных на рисунке 5, при компьютерном моделировании целесообразно представить в виде квадратной несимметричной матрицы с размерностью равной числу хорд [11]. При этом элемент a_{ij} такой матрицы будет представлять собой пустую ячейку при отсутствии пересечения i -ой и j -ой хорд. Если же такое пересечение есть, то в соответствующей клетке матрицы указывается характеристика пересечения, в простейшем случае просто число 1.

Рассматриваемый в данной работе метод (см. далее) основан на том, что количество компонент свободного рационального зацепления совпадает с количеством компонент соответствующего ему рационального зацепления. Поэтому далее будем рассматривать именно свободные зацепления, их d -диаграммы и делать соответствующие выводы для рациональных зацеплений.

Метод определения количества компонент рационального зацепления. С помощью движений (*) можно любую d -диаграмму свободного зацепления свести к двум вариантам: 1) к d -диаграмме, не содержащей ни одной хорды, тогда она соответствует узлу (а значит, состоит из одной компоненты); 2) к d -диаграмме, содержащей две пересекающиеся хорды (следовательно, количество компонент равно двум).

Необходимо отметить, что, если рациональные зацепления задаются как $R(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots)$, где n_i , $i = 1, 2, 3, \dots, k, \dots$, – количество малых хорд в d -диаграмме, то соответствующие свободные зацепления определяются остатками от деления $\frac{n_i}{2}$. Тогда, если n_i – четное, то в остатке получаем нуль, а если нечетное, то в остатке получаем 1.

Таким образом, всякое свободное зацепление будет задаваться последовательностью из нулей и единиц, в которой нуль соответствует основной хорде в d -диаграмме, а единица соответствует малой хорде, которая пересекает основную хорду в окрестности ее начала. Тогда любое свободное зацепление с помощью операций (*) можно свести либо к нулю (что соответствует одной компоненте в зацеплении), либо к единице (что соответствует двум компонентам в зацеплении).

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

Утверждение. Рассмотрим d -диаграмму произвольного свободного рационального зацепления. Выделим в ней часть, содержащую все хорды, кроме первых двух и назовем ее областью A . Тогда справедливы следующие равенства:

- 1) $00A = A'$, где A' – это область A без первой хорды из числа содержащихся в этой области хорд;
- 2) $01A = 0A$; 3) $10A = A$; 4) $11A = A$; 5) $000A = A$.

Докажем каждое из этих равенств по отдельности.

Доказательство. Формула 1. $00A = A'$. На рисунке 6а изображена d -диаграмма, соответствующая последовательности $00A$. К d -диаграмме в таком виде не применима ни одна из трех операций, соответствующих (*). Однако если из области A выделить первую хорду, то к полученной d -диаграмме уже применимо третье движение Ω_3 (рис. 6б).

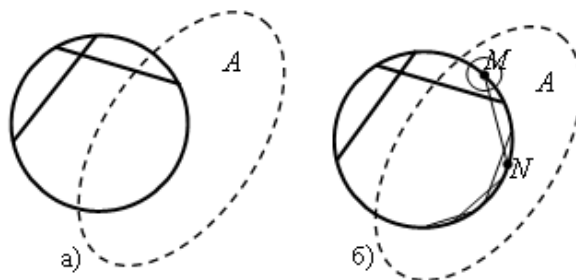


Рисунок 6 – d -Диаграмма, соответствующая последовательности $00A$: а) область A без первой хорды; б) область A с первой хордой

Данная хорда может быть как пересечена малой хордой в окрестности ее начала M , так и не пересечена. По замечанию, сформулированному ранее, если малая хорда в окрестности вершины M существует, то ее можно перенести в окрестность вершины N .

Таким образом, возможны две ситуации:

1. Если в окрестности вершины N хорды нет, то ответ очевиден (рис. 7). В этом случае применимо третье движение Ω_3 к хордам a, b и c . Затем, последовательно применяя движения Ω_1^+ и Ω_2^+ , получим d -диаграмму, содержащую только хорды из области A , но без первой хорды c , т.е. хорды из области A' .

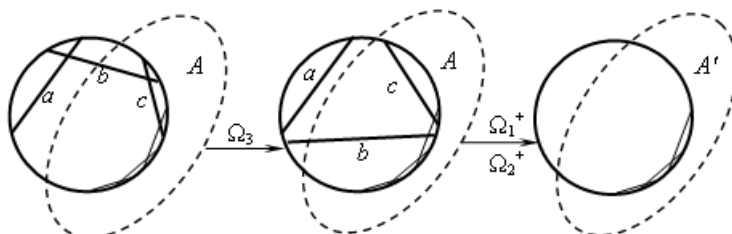


Рисунок 7 – Доказательство формулы $00A = A'$ в случае, когда первая хорда из области A не пересечена малой хордой в окрестности ее конца

2. Если в окрестности вершины N хорда существует, то для хорд a, b, c выполняется движение Ω_3 . Затем для хорды a выполняем первое движение Ω_1^+ и для хорд b, c применяем движение Ω_2^+ . В итоге в d -диаграмме остается область A' и хорда d , для которой применяем движение Ω_1^+ . После последовательного применения движений (*), как и в первом случае, остается только область A' (рис. 8). Таким образом, формула 1 доказана: $00A = A'$.

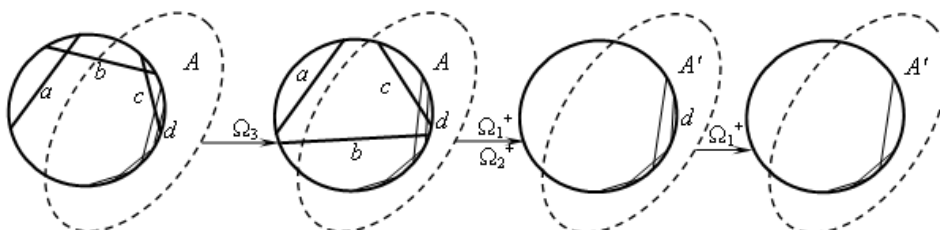


Рисунок 8 – Доказательство формулы $00A = A'$ в случае, когда первая хорда из области A пересечена малой хордой в окрестности ее конца

Для последовательности из нулей и единиц область A' представляет собой оставшуюся после применения той или иной формулы леммы последовательности без цифры, стоящей в этой последовательности на первом месте.

Формула 2. $01A = 0A$ Рассмотрим d -диаграмму, соответствующую последовательности $01A$. Очевидно, что к хордам a и b в этой d -диаграмме применима операция Ω_2^+ из (*). В результате получаем d -диаграмму, в которой помимо области A остается еще одна хорда c , т.е. формула 2 доказана: $01A = 0A$ (рис. 9).

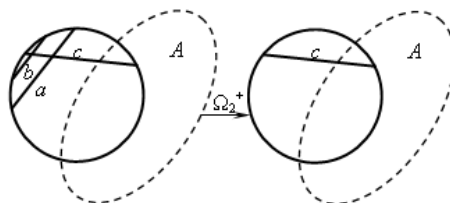
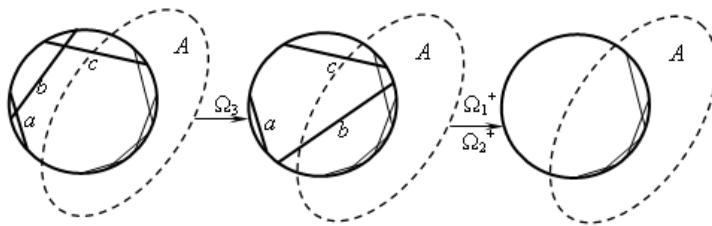
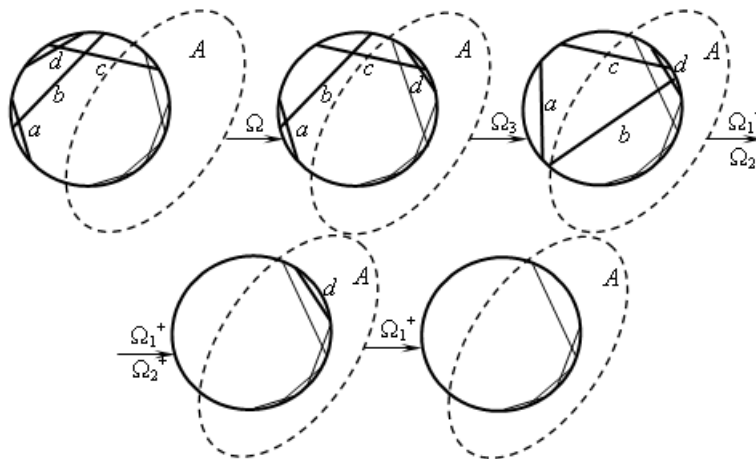


Рисунок 9 – Доказательство формулы $01A = 0A$

Формула 3. $10A = A$ Последовательности $10A$ соответствует d -диаграмма, изображенная на рисунке 10. В результате применения к хордам a, b, c третьего из движений (*), хорда a становится одиночной, и к ней применяем движение Ω_1^+ . Затем к хордам b, c применяем движение Ω_2^+ . Таким образом, в d -диаграмме остаются только хорды из области A , т.е. $10A = A$. Формула 3 доказана.

Рисунок 10 – Доказательство формулы $10A = A$

Формула 4. $11A = A$ Для доказательства четвертой формулы утверждения в d -диаграмме, соответствующей набору $11A$ (рис. 11), к хорде d применим движение Ω .

Рисунок 11 – Доказательство формулы $11A = A$

После этого в полученной d -диаграмме к хордам a, b и c можно применить движение Ω_3 . Затем к одиночной хорде a и параллельным хордам b и c последовательно применим движения Ω_1^+ и Ω_2^+ . Тем самым, хорда d становится одиночной. Снова воспользуемся движением Ω_1^+ . В результате в d -диаграмме остается только область A , т.е. $11A = A$.

Формула 5. $000A = A$ Докажем последнюю из формул утверждения. Рассмотрим последовательность $000A$. Воспользуемся первой формулой, а именно $00A = A'$, которая доказана выше, получим: $000A = (0A)' = A$. Доказательство этой формулы с помощью движений (*) аналогично доказательству формулы 3.

Таким образом, все пять равенств (формул) утверждения доказаны.

Как указывалось выше, всякое свободное зацепление можно задать с помощью последовательности из нулей и единиц. Используя доказанное выше утверждение, любую такую последовательность независимо от количества ее элементов легко свести либо к нулю, либо к единице.

Демонстрационный пример. В качестве примера определим количество компонент для рационального зацепления, которое задается в виде $R(4,7,8,2,5,9,11,6,6,3,2,3,6,9,13,7)$. Числа в данной последовательности, как говорилось ранее, означают количество малых хорд в d -диаграмме данного зацепления. Эта последовательность с точки зрения компьютерной обработки может рассматриваться как одномерный массив целых чисел.

Запишем соответствующее рациональному зацеплению свободное зацепление $R^*(4,7,8,2,5,9,11,6,6,3,2,3,6,9,13,7)$ в виде последовательности. Затем к полученной последовательности применим доказанное ранее утверждение, включающее пять формул. Заданное свободное рациональное зацепление можно записать в виде $R^*(0,1,0,0,1,1,1,0,0,1,0,1,0,1,1,1)$, т.е. в виде одномерного массива, элементами которого могут быть только 0 и 1.

Соответствующая ему последовательность из нулей и единиц имеет вид 0100111001010111. Это представление может рассматриваться как некоторое число, записанное в двоичном коде. При этом то же самое число может быть представлено и в десятичной системе счисления, и в 16-ричной и т.д.

К получившейся последовательности на первом шаге применим вторую формулу леммы: $01A = 0A$. При этом в последовательности исчезает первая единица (она подчеркнута):

$0100111001010111 \rightarrow 000111001010111$. Далее применяем пятую формулу: $000111001010111 \rightarrow 111001010111$. Затем последовательно применяем формулы 4, 3, 2, 1 и три раза применяем формулу 2. Это соответствует последовательности операций, приводимых ниже, причем числами над стрелочками указаны номера применяемых формул:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 4 & & 3 & & 2 \\ & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow \\ \underline{111001010111} & \rightarrow & \underline{1001010111} & \rightarrow & \underline{01010111} & \rightarrow & \\ & 2 & & 1 & 2 & 2 & 2 \\ & \rightarrow & \underline{0010111} & \rightarrow & \underline{0111} & \rightarrow & \underline{01} \rightarrow 0. \end{array}$$

Таким образом, исходная последовательность сводится к значению 0. В свою очередь это означает, что заданное свободное зацепление, а, следовательно, и соответствующее ему рациональное зацепление, состоит из одной компоненты, то есть представляет собой рациональный узел.

Алгоритм вычисления количества компонент. Исходя из всего вышеизложенного, алгоритм вычисления количества компонент произвольного рационального зацепления можно представить в следующем виде.

1. Записать заданное рациональное зацепление в виде $R(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots)$.
2. Записать соответствующее ему свободное рациональное зацепление R^* .
3. Составить последовательность из нулей и единиц, соответствующую $R^*(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots)$,

которая определяется остатками от деления $\frac{n_i}{2}$.

4. К полученной последовательности применить формулы, справедливость которых была доказана в утверждении, и с помощью них упростить последовательность до одного числа: либо нуля, либо единицы.

5. Сделать вывод о количестве компонент в свободном зацеплении и, следовательно, в соответствующем ему рациональном зацеплении.

Описанный алгоритм в представленной форме носит линейный характер. При этом с алгоритмической точки зрения целесообразно отметить следующее:

1. Пункт 3 реализуется в виде цикла, на каждом шаге которого осуществляются операции деления на 2 и получения остатков от такого деления.

2. Пункт 4 предполагает на каждом шаге внутри цикла решение задачи выбора (и практического применения) одной из пяти приведенных в утверждении формул. Такой выбор осуществляется (причем однозначно!) в зависимости от содержания «самых левых символов» в оставшейся на текущем шаге алгоритма числовой последовательности. Цикл заканчивается, когда в итоге останется число, состоящее только из одной цифры. На основе него можно сделать вывод о количестве компонент и, как следствие, о том, является ли узел рациональным.

Описанный цикл может быть реализован различным образом, в том числе и с использованием конструкций типа “do-while” или “do-until” [11].

С применением компьютерной реализации данного алгоритма могут быть исследованы в отношении количества компонент достаточно большие наборы рациональных зацеплений: полученные из реальных прикладных задач; сгенерированные (случайным образом или по определенным правилам) [11].

Вывод. Таким образом, в отличие от других методов, данный подход позволяет вычислять количество компонент любого рационального зацепления без особых усилий. Для его применения нет необходимости строить как обычную диаграмму зацепления, так и соответствующую ему d -диаграмму. Достаточно задать свободное рациональное зацепление в виде $R^*(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots)$; составить соответствующую ему последовательность из нулей и единиц и далее действовать по описанному выше алгоритму, допускающему достаточно простую вычислительную реализацию на основе программы для ЭВМ.

Список литературы

1. Аношина Е. И. d -диаграммы. Рациональные узлы. Полином Конвея для рациональных узлов вида $R(0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ / Е. И. Аношина // Труды кафедры геометрии Московского государственного областного университета. – 2007. – № 4. – С. 5–10.
2. Аношина Е. И. Рациональные узлы и многогранники // Математика. Компьютер. Образование : сб. науч. тр. – Москва – Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2008. – Т. 2. – С. 9–16.
3. Джонс Воган Ф. Р. Теория узлов и статистическая механика / Джонс Воган Ф. Р. // Scientific American. – 1991. – № 1. – С. 44–50.
4. Илюхин А. А. Математическая модель замкнутых молекул ДНК / А. А. Илюхин, Д. В. Тимошенко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2008. – Т. 8, вып. 3. – С. 32–40.
5. Кроуэлл Р. Введение в теорию узлов : пер. с англ. / Р. Кроуэлл, Р. Фокс. – Череповец : Меркурий-Пресс, 2000. – 348 с.
6. Мантуров В. О. Лекции по теории узлов и их инвариантов / В. О. Мантуров. – Москва : Эдиториал УРСС, 2001. – 304 с.
7. Мантуров В. О. Экскурс в теорию узлов / В. О. Мантуров // Сетевой образовательный журнал. – 2004. – Т. 8, № 1. – С. 122–127.

8. Мантуров В. О. Теория узлов / В. О. Мантуров. – Москва : РХД, 2005. – 512 с.
9. Мантуров О. В. d-Диаграммы рациональных узлов / О. В. Мантуров, О. С. Скрипченко // Труды кафедры геометрии Московского государственного областного университета. – 2006. – № 3. – С. 30–36.
10. Мантуров О. В. Узлы, однотоочечные диаграммы и перестановки / О. В. Мантуров, Е. И. Сячина // Симметрии: теоретический и методический аспекты : сб. науч. тр. – Астрахань : АИПКП, 2009. – С. 60–66.
11. Самарский А. А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – Москва : Физматлит, 2002. – 320 с.
12. Сосинский А. Б. Узлы и косы / А. Б. Сосинский. – Москва : МЦНМО, 2001. – Т. 10. – 24 с.
13. Сосинский А. Б. Узлы. Хронология одной математической теории / А. Б. Сосинский. – Москва : МЦНМО, 2005.
14. Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии / Г. Ю. Ризниченко. – Москва – Ижевск : РХД, 2002. – 236 с.
15. Франк-Каменецкий М. Д. Самая главная молекула. От структуры ДНК к биомедицине XXI века / М. Д. Франк-Каменецкий. – Режим доступа: <http://ours-nature.ru/lib/b/book/2703634319/>, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. рус.
16. Франк-Каменецкий М. Д. Узлы ДНК / М. Д. Франк-Каменецкий. – Режим доступа: <https://postnauka.ru/video/36239>, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. рус.
17. Irvine I. Linked and knotted beams of light / I. Irvine, D. Bouwmeester // Nature Physics. – 2008. – P. 716–720.
18. Kauffman L. Classifying and applying rational knots and rational tangles / L. Kauffman, S. Lambropoulou // Contemporary mathematics. – 1999. – 37 p.

References

1. Anyushina Ye. I. d-diagrammy. Ratsionalnyye uzly. Polinom Konveya dlya ratsionalnykh uzlov vida $R(0,0,0,\dots,0,\dots)$ [Rational nodes. The Conway polynomial for rational knots of the form $R(0,0,0,\dots,0,\dots)$]. Trudy kafedry geometrii Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta [Proceedings of the Department of Geometry of the Moscow State Regional University], 2007, no. 4, pp. 5–10.
2. Anyushina Ye. I. Ratsionalnyye uzly i mnogogranniki [Rational knots and polyhedral]. Matematika. Kompyuter. Obrazovaniye: Sbornik nauchnykh trudov [Mathematics. A computer. Education: Collection of scientific papers]. Moscow – Izhevsk, Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika Publ., 2008, vol. 2, PP. 9–16.
3. Dzhons Vogan F. R. Teoriya uzlov i statisticheskaya mekhanika [The knot theory and statistical mechanics]. Scientific American [Scientific American (Russian edition)], 1991, no. 1, pp. 44–50.
4. Ilyukhin A. A., Timoshenko D. V. Matematicheskaya model zamknutykh molekul DNK [Mathematical model of closed DNA molecules]. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya "Matematika. Mekhanika. Informatika" [News of the Saratov University. New Ser. Series Mathematics. Mechanics. Informatics], 2008, vol. 8, no. 3, pp. 32–40.
5. Krouell R., Foks R. Vvedeniye v teoriyu uzlov [Introduction to knot theory]. Cherepovets, Merkuriiy-Press Publ., 2000, 348 p.
6. Manturov V. O. Lektsii po teorii uzlov i ikh invariantov [Lectures on the theory of knots and their invariants]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2001, 304 p.
7. Manturov V. O. Ekskurs v teoriyu uzlov [Excursus to the theory of knots]. Setevoy obrazovatelnyy zhurnal [Network educational magazine], 2004, vol. 8, no. 1, pp. 122–127.
8. Manturov V. O. Teoriya uzlov [The theory of knots]. Moscow, RKHD Publ., 2005, 512 p.
9. Manturov O. V., Skripchenko O. S. d-Diagrammy ratsionalnykh uzlov [d-Diagrams of rational nodes]. Trudy kafedry geometrii Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta [Proceedings of the Department of Geometry of the Moscow State Regional University], 2006, no. 3, pp. 30–36.
10. Manturov O. V., Syachina Ye. I. Uzly, odnotochechnyye diagrammy i perestanovki [Nodes, single-point diagrams and permutations]. Simmetrii: teoreticheskiy i metodicheskiy aspekty: Sbornik nauchnykh trudov [Symmetry: theoretical and methodological aspects: Collection of scientific papers]. Astrakhan, AIPKP Publ., 2009, pp. 60–66.
11. Samarskiy A. A., Mikhaylov A. P. Matematicheskoye modelirovaniye. Idei. Metody. Primery [Mathematical modeling. Ideas. Methods. Examples]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 320 p.
12. Sosinskiy A. B. Uzly i kosy [Knots and braids]. Moscow, MTSNMO Publ., 2001, vol. 10, 24 p.
13. Sosinskiy A. B. Uzly. Khronologiya odnoy matematicheskoy teorii [The knots. Chronology of a mathematical theory]. Moscow, MTSNMO Publ., 2005.
14. Riznichenko G. Yu. Lektsii po matematicheskim modelyam v biologii [Lectures on mathematical models in biology]. Moscow – Izhevsk, RKHD Publ., 2002, 236 p.
15. Frank-Kamenetskiy M. D. Samaya glavnaya molekula. Ot struktury DNK k biomeditsine XXI veka [The most important molecule. From the structure of DNA to biomedicine of the XXI century]. Available at: <http://ours-nature.ru/lib/b/book/2703634319/>.
16. Frank-Kamenetskiy M. D. Uzly DNK [Knots of DNA]. Available at: <https://postnauka.ru/video/36239>.
17. Irvine I., Bouwmeester D. Linked and knotted beams of light. Nature Physics, 2008, p. 716–720.
18. Kauffman L., Lambropoulou S. Classifying and applying rational knots and rational tangles. Contemporary mathematics, 1999, 37 p.