УДК 004.9:(005.94:78)

СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА ПО ПРЕДПИСАННОЙ ПРОГРАММЕ

Статья поступила в редакцию 20.01. 2015, в окончательном варианте 17.02. 2015

Батырканов Жениш Исакунович, доктор технических наук, профессор, проректор по научной работе, Кыргызский технический университет им. И. Раззакова, 720044, Кыргызская Республика, г. Бишкек, пр. Мира 66, e-mail: bjenish@mail.ru

Кадыркулова Кыял Кудайбердиевна, аспирант, Кыргызский технический университет им. И. Раззакова, 720044, Кыргызская Республика, г. Бишкек, пр. Мира 66, e-mail: kyial_02@mail.ru

На сегодняшний день проблема управления движением объекта по предписанной траектории (программе) более или менее решена для линейных объектов в случае, когда траектории задается в аналитической форме. Когда предписанную траекторию нельзя описать аналитически, то возникают большие затруднения. В данной работе приводятся подходы к управлению в случае задания предписанной траектории как в аналитической, так и в табличной форме. Суть предлагаемых подходов синтеза законов управления заключается, во-первых, во введении в рассмотрении функции отклонения фактической траектории движения от предписанной траектории; во-вторых, рассматривается дифференциальное уравнение динамики переходного процесса для отклонения. Затем, назначая для управляемого объекта заданную динамику переходного процесса для отклонения на траекториях движения, мы находим алгебраические соотношения для отыскания необходимых законов управления. При этом используется аппарат пространства со скалярным произведением и один из результатов Р. Беллмана, относящийся к линейной алгебре. В итоге получаем новые конструктивные, эффективные процедуры синтеза искомых законов управления.

Ключевые слова: предписанная программа (траектория), закон управления, объект управления, вектор невязки, вектор состояния, динамика переходного процесса, конечно-разностное уравнение

SYNTHESIS OF CONTROL LAWS FOR THE IMPLEMENTATION OF THE OBJECT MOVEMENT IN LINE WITH THE PRESCRIBED PROGRAM

Batyrkanov Zhenish I., D.Sc. (Engineering), Professor, Vice Rector for Research and Foreign Relations, Kyrgyz Technical University named after I. Razzakov, 66 Mir Ave., Bishkek, 720044, Kyrgyz Republic, e-mail: bjenish@mail.ru

Kadyrkulova Kyyal K., post-graduate student, Kyrgyz Technical University named after I. Razzakov, 66 Mir Ave., Bishkek, 720044, Kyrgyz Republic, e-mail: kyial_02@mail.ru

Nowadays, the issue of controlling the movement of the object in line with the prescribed trajectory is more or less well developed in the case of linear objects with their trajectories provided in analytical form. Therefore, difficulties arise when the prescribed trajectory cannot be described analytically. This paper provides a synthesis' approach for solving the problems whose trajectories are cast either in analytical form or in table format. The proposed of the synthesis approach is, the first in the introduction into consideration the actual function of the deviation from the prescribed trajectory, secondly we consider the differential equation for the dynamics of the transition process for the deviation. Further, the destination specified dynamics of the transition process for deviations in the motion path for a managed object, we find the algebraic relations for finding the necessary control laws. At the same time, the machine is used with an inner product space and one result Bellman from linear algebra. As a result, we obtain the new effective procedures, for the synthesis of the desired control laws.

Keywords: prescribed program (trajectory), control law, controlled object, condition vector, finite difference equation, vector of differences

Задачи осуществления движения управляемого объекта по предписанной программе (траектории) относятся к неклассическим задачам автоматического управления, и на сегодняшний день полная теория анализа и синтеза таких систем отсутствует. Однако практика ставит множество задач, которые относятся к задачам обеспечения движения управляемых объектов по предписанным программам (траекториям). Это задачи траекторного управления летательными аппаратами; лазерным лучом; рабочими органами роботов; управления рабочими органами и иными механизмами в системах, использующих 3D-технологии.

На сегодняшний день в случае, когда предписанная траектория движения объекта описывается аналитически, существуют различные методы, подходы к решению таких задач. Это, в частности, подходы, предложенные В.Д. Фурасовым [10], П.Д. Крутько [6] и другими авторами [5, 9, 11]. Однако они позволяют решать задачи только для определенных классов управляемых объектов – в основном для линейных.

Поэтому целью данной статьи является описание разработанных авторами подходов для синтеза законов управления по осуществлению движения объектов по произвольным предписанным траекториям: сначала для траекторий, задаваемых в аналитической форме, затем – в табличной. Эти подходы позволяют эффективно проводить процедуру синтеза для достаточно широкого класса управляемых объектов.

Подход к синтезу, когда предписанная траектория задается в аналитической форме. Суть предлагаемых подходов к синтезу раскроем на примере, когда предписанная траектория задается в виде одного алгебраического соотношения. Подходы в случае, когда используется несколько алгебраических соотношений, можно найти в работах [1, 2, 3, 11].

Пусть математическая модель управляемого объекта представлена в стандартной векторно-дифференциальной форме:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x,u,t), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_{2,} \dots, x_n)^T$ – вектор состояния, $u = (u_1, u_{2,} \dots, u_m)^T$ – вектор управления, T – символ транспонирования.

Предписанная программа движения объекта описывается в виде аналитического соотношения:

$$\Psi(x,t) = 0\,. \tag{2}$$

Для отыскания управления рассматривается полная производная по времени функции $\Psi(x,t) = 0$ на движениях системы. В соответствии с (2) имеем:

$$\frac{d}{dt}\Psi(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0\,. \tag{3}$$

С учетом уравнений движения системы имеем:

$$\frac{d}{dt}\Psi(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} f_i(x,u,t) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0\,. \tag{4}$$

Разрешая это соотношение относительно искомой функции $u(x,t)$, находим искомый закон управления, при котором движение объекта осуществляется по предписанной траектории. Однако с практической точки зрения задача синтеза будет решена в том случае, если закон управления обеспечивает также возвращение из точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, соответствующей объекту, на предписанную траекторию $\Psi(x,t)$, если по каким-либо причинам она окажется вне ее. Другими словами закон управления должен обеспечивать не только процесс движения по предписанной траектории, но и устойчивость требуемого движения при возмущениях. Для такого закона управления, очевидно, должно выполняться соотношение:

$$\frac{d\psi}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} f_i(x,u,t) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = R(\psi,x,t)\,, \tag{5}$$

где $R(\psi,x,t)$ – произвольная функция, обращающаяся в нуль на кривой (2), т.е.:

$$R(0,x,t) = 0\,. \tag{6}$$

Действительно, если точка $x = (x_1.x_2,..,x_n)$ окажется вне предписанной траектории (2), то $\Psi(x,t) \neq 0,\ R(\psi,x,t) \neq 0$.

Поэтому $\delta = (\psi,x,t) \neq 0$ представляет собой отклонение фактической траектории от предписанной, а переходный процесс для отклонения описывается уравнением:

$$\frac{d\delta}{dt} = R(\delta,x,t), \qquad\qquad R(0,x,t) = 0\,. \tag{7}$$

Из постановки задачи синтеза закона управления непосредственно вытекает, что должно выполняться условие $\delta(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Это условие накладывает определенные требования на выбор произвольной функции $R(\psi,x,t)$. Например, функция $R(\psi,x,t)$ подбирается из условия заданного времени отработки начального рассогласования $\delta(t_0)$ и условий физической реализуемости. На этих моментах сейчас не будем останавливаться.

Таким образом, искомый закон управления с учетом (5) определяется из соотношения:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} f_i(x,u,t) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = R(\psi,x,t), \tag{8}$$

Для определения искомого уравнения из этого соотношения, представим (8) в пространстве со скалярным произведением, в следующем равносильном виде:

$$\left(\frac{d\psi}{dt}, f(x,u,t)\right) = R(\psi,x,t) - \frac{d\psi}{dt}\,, \tag{9}$$

где $\left(\frac{d\psi}{dt}, f(x,u,t)\right)$ – символ скалярного произведения.

В частности, для линейного объекта:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{10}$$

Основное соотношение (9) в данном случае представится как:

$$\left[\frac{d\psi}{dx}, A(t)x + B(t)u\right] = R(\psi,x,t)\frac{d\psi}{dt}$$

Отсюда:

$$\left[\frac{B^T(t)d\psi}{dx}, u\right] = R(\psi,x,t) - \left[\frac{d\psi}{dt}, A(t)x\right]\frac{d\psi}{dt} = a(\psi,x,t)\,. \tag{11}$$

Для определения искомого управления из полученного скалярного уравнения используем результат Р. Беллмана из линейной алгебры в работе [6], где решается задача нахождения вектора, лежащего в заданной гиперплоскости:

$$(x,b) = a \tag{12}$$

и имеющего минимальную норму $\|x\|$.

Решение данной задачи определяется выражением:

$$x_0 = (b,b)^{-1} \cdot b \cdot a\ . \tag{13}$$

Используя теперь аналогию между выражениями (11) и (12) на основании (13), искомый закон управления определяется в виде:

$$U = \left(B^T \frac{d\psi}{dx}, B^T \frac{d\psi}{dx} \right)^{-1} \cdot B^T \frac{d\psi}{dx} a(\psi, x, t), \tag{14}$$

где функция $\alpha(\psi, x, t)$ соответствует выражению:

$$a(\psi, x, t) = R(\psi, x, t) - \left(\frac{d\psi}{dx}, A(t)x \right) - \frac{d\psi}{dt}. \tag{15}$$

При этом синтезированный закон управления обладает свойством $\|u\| \to \min$.

В конце данного пункта сделаем следующее замечание. Закон управления существует только для тех требуемых траекторий, для которых вектор $B^T \dfrac{d\psi}{dx}$ не является нулевым. Это утверждение вытекает из соотношения (11).

Модельный пример синтеза закона управления при описании траектории в аналитической форме. Пусть управляемое движение описывается уравнением:

$$\ddot{x} = u\ . \tag{16}$$

Требуется построить управляющую функцию исходя из условия, чтобы переменная x изменялась по гармоническому закону $x(t) = A\sin\omega t$, где A – амплитуда и ω – частота. При гармонических колебаниях между переменными x и $\dot{x}$ существует зависимость:

$$\psi(x, \dot{x},) = x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} A^2 = 0\ . \tag{17}$$

Для решения задачи уравнение (16) представим в виде системы:

$$\begin{cases} x_1 = x_2; \\ x_2 = u, \end{cases}$$

или в стандартном векторно-матричном виде:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{18}$$

где:

$$x = (x_1, x_2)^T, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Предписанная траектория в новых обозначениях принимает вид:

$$\Psi(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{x^2}{\omega^2} A^2 = 0\ . \tag{19}$$

Произвольную функцию $A = (\psi, x, t),$ выберем исходя из следующих соображений. Для нашей задачи отклонение фактической траектории от предписанной, т.е. ошибка выполнения заданной программы движения имеет вид:

$$\delta = \psi(x_1, x_2,) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} A^2 \neq 0\ .$$

При этом, как мы показали ранее, переходный процесс для отклонения определяется уравнением:

$$\frac{d\delta}{dt} = R(\delta, x, t), R(0, x, t).$$

Потребуем, чтобы процесс отработки начального отклонения $\delta(t_0)$, происходил за заданное время. Такое требование можно удовлетворить, если выберем функцию в виде:

$$R(\delta, x, t) = a(x)\delta, \qquad (20)$$

где коэффициент $a(x)$ подберем из условий физической реализуемости.

Для нахождения искомого закона управления, согласно выражению (14), предварительно определим:

$$B^T \frac{d\psi}{dx} = (0;1)\left(2x_1; \frac{2x_2}{\omega^2}\right)^T = \frac{2x_2}{\omega^2};$$

$$\left(B^T \frac{d\psi}{dx}, B^T \frac{d\psi}{dx}\right)^{-1} = \frac{\omega^4}{4x_2^2};$$

$$\alpha(\psi, x, t) = R(\psi, x, t) - \left(\frac{d\psi}{dx}, Ax\right) - \frac{d\psi}{dt} = a(x)\delta - 2x_1x_2.$$

С учетом найденных выражений искомый закон управления, согласно (14), определяется в виде:

$$U = \frac{\omega^2}{2x_2(a(x)\delta - 2x_1x_2)}, \qquad ..(21)$$

где $\delta = x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} - A^2$.

Перепишем выражение (21) в следующем виде:

$$U = -\omega^2\left(x - \frac{a(x)\delta}{2x_2}\right)$$

или в исходных обозначениях переменных:

$$U = -\omega^2\left(x - \frac{a(x)\delta}{2\dot{x}}\right). \qquad (22)$$

Уравнение замкнутой системы с учетом (16) и (22) определяется уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2\left(x - \frac{a(x)\delta}{2\dot{x}}\right). \qquad (23)$$

Если точка $x = (x, x_2)$, находится на кривой $\psi(x, x_2) = 0$, то отклонение (ошибка, рассогласование) $\delta = 0$. В этом случае из (23) следует известное уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Если же точка $(x, \dot{x}_2)$ не скользит по кривой $\psi(x, \dot{x}_2) = 0$, то управляющая функция имеет составляющую:

$$\Delta U = \omega^2 a(x) \frac{\delta(x, \dot{x}_2)}{2\dot{x}_2},$$

которая стремится вывести систему на заданную траекторию движения.

Вычисление величины ΔU связано с необходимостью деления на x_2. При наличии колебаний переменная x_2 может принимать нулевые значения. Поэтому реализация закона управления (22) связана с известными затруднениями.

Чтобы их избежать, подбор коэффициента $a(x)$ осуществим в виде:

$$a(x) = -2a_0 x^2, \qquad a_0 \succ 0, \tag{24}$$

Тогда выражение (22) для закона управления представится как:

$$U = -\omega^2 \left(x_1 - \frac{a(x)\delta}{2x_2} \right) = \omega^2 (x_1 + \alpha_0 \delta \cdot x_2), \tag{25}$$

где:

$$\delta = x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} - A^2$$

Реализация полученного закона (25) уже не вызывает никаких затруднений. Выбор коэффициента $a(x)$ в виде (24) мы осуществили исходя из следующих соображений. Переходный процесс отработки ошибки выполнения предписанной программы, как было показано выше, выражается в виде (7). При этом требуется выполнение условия $\delta(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Данному требованию удовлетворяет, например, функция:

$$R(\delta, x, t) = a(x)\delta = -2a_0 x_2^2 \cdot \delta,$$

которую мы выбрали выше. Действительно, при этом имеем:

$$\frac{d\delta}{dt} = 2\alpha_0 x_2^2 \cdot \delta = 0. \tag{26}$$

Применяя к уравнению (26) метод функций Ляпунова с функцией Ляпунова вида $V = \delta^2 \succ 0$, имеем $\dot{V} = 2\delta\dot{\delta} = -4\alpha_0 x_2^2 \delta^2 \prec 0$. Отсюда вытекает выполнение условия $\delta(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Рассмотренный выше пример показывает, что процедура синтеза не вызывает никаких затруднений и единственный произвол при этом, заключается в выборе функции $R(\psi, x, t)$. Такой произвол частично устраняется путем подбора этой функции из условий заданной динамики отработки ошибки выполнения предписанной программы движения и условий физической реализуемости.

На рисунках 1 и 2 показаны результаты моделирования синтезированной замкнутой системы управления на ПЭВМ с помощью программного средства MATLAB. На этих рисунках пунктиром показаны возмущенные движения, которые затем переходят в предписанные требуемые движения.

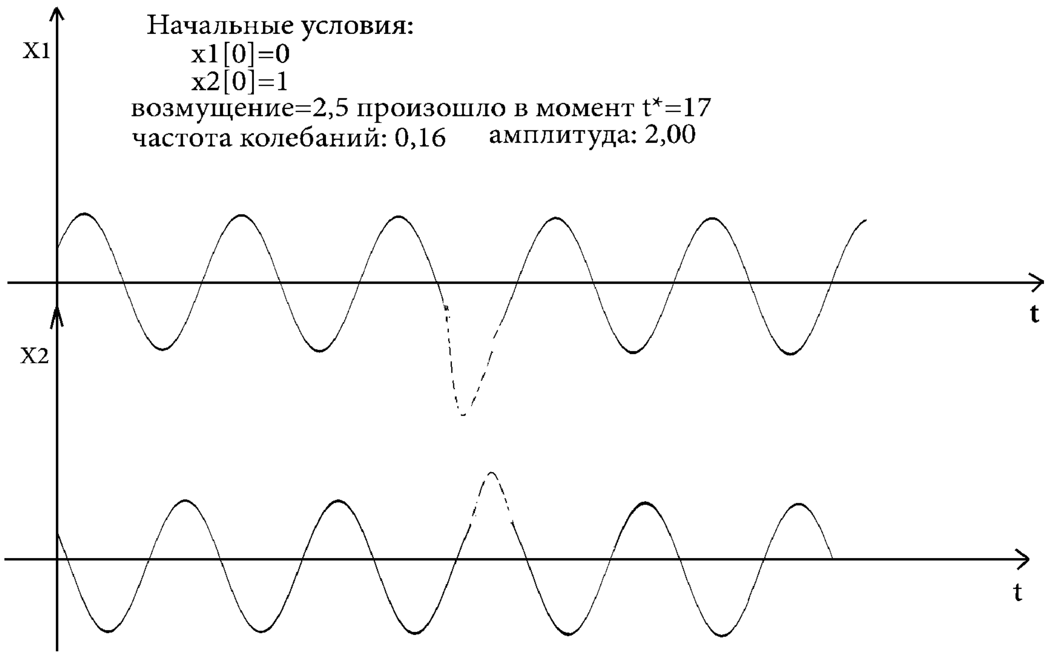

Рис. 1. Предписанные движения со стабилизацией

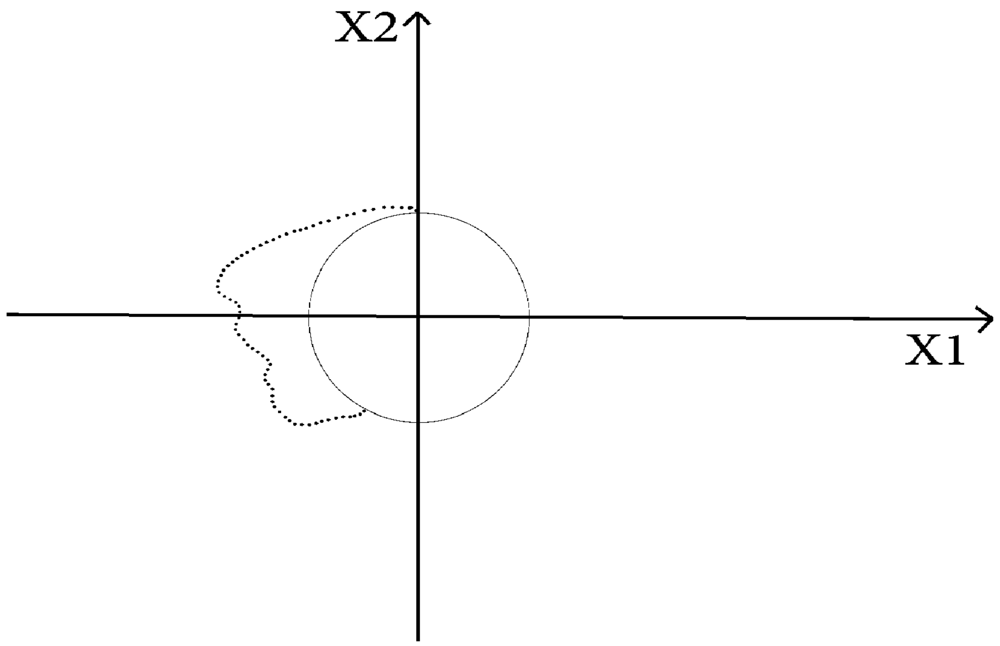

Рис. 2. Фазовый портрет синтезированной системы

Из этих рисунков видно, что независимо от начальных условий движение объекта выходит на предписанную траектории движения, т.е. на гармонический закон колебаний. Кроме того, показаны устойчивости движения на этих предписанных траекториях. В момент времени

$t = t_* = 17$ мы подали возмущающий импульс, движение системы возмутилось, т.е. вышло за рамки предписанной (гармонической) траектории. А затем движение системы возвратилось к предписанному гармоническому закону движения. Таким образом, мы видим, что синтезированный закон управления обеспечивает устойчивость движения по предписанной траектории.

Синтез законов управления предписанными программами движения, заданными в табличной форме. Во многих практически важных случаях, например в задачах робототехники, при автоматизации раскроя и конструирования одежды, использования лазерных технологий микроэлектроники, в системах 3D технологий и др., аналитическое представление предписанной программы движения вызывает большие затруднения. В этих случаях предписанную траекторию движения можно представлять в виде конечномерного множества дискретных контрольных точек, в частности в виде таблицы. В этих случаях предлагается следующий подход к синтезу.

Пусть управляемый объект описывается уравнением:

$$\dot{x} = f(x,u,t), \tag{27}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – вектор состояния, $u = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$ – вектор управления.

Требуется синтезировать закон управления по осуществлению движения управляемой системы по предписанной траектории, заданной в табличной форме (табл. 1).

Таблица 1

Предписанная траектория движения, заданная в табличной форме

t_k	t_0	t_1	t_2	t_3	–
x_1	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	–
x_2	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	–
–	–	–	–	–	–
x_n	x_{n0}	x_{n1}	x_{n2}	x_{n2}	–

Для удобства примем $t_k = k$, k = 0, 1, 2, …, то есть введем абстрактные дискретные моменты времени.

Уравнение системы после дискретизации имеет следующий вид:

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{t_{k+1} - t_k} = f(x(k), u(k), k);$$

или

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta} = f(x(k), u(k), k); \tag{28}$$

$$x(k+1) = x(k) + f(x(k), u(k), k)\Delta, \tag{29}$$

где $x(k)$ – текущее состояние, $x(k+1)$ – состояние на следующем шаге. Это выражение связывает текущее состояние $x(k)$, текущее управление $u(k)$ и состояние $x(k+1)$ в следующий момент времени.

Из выражения (28) можно определить $u(k)$:

$$u(k) = U(x(k), x(k+1), k, \Delta).$$

Однако такой способ не гарантирует устойчивого осуществления движения по требуемым предписанным дискретным точкам движения.

Поэтому искомое управление будем находить путем минимизации квадрата невязки между требуемыми и текущими дискретными значениями состояния управляемого объекта.

Таким образом, управление будем искать в виде:

$$\left\| x_{табл}\ (k+1) - x_{текущ}\ (k+1) \right\|^2 \Rightarrow \min_{u(k)}, \qquad (30)$$

где – табличное значение, $x_{текущ}(k+1)$ – текущее значение.

Распишем выражение (28) подробно:

$$\left(x_{табл}(k+1) - x_{текущ}(k+1), x_{табл}(k+1) - x_{текущ}(k+1)\right)$$
$$= \left(x_{табл}(k+1) - x(k) - f\left(x(k), u(k), k\right)\Delta, x_{табл}(k+1) - x(k) - f\left(x(k), u(k), k\right)\Delta\right) \Rightarrow \min_{u(k)}$$

Затем, взяв частную производную по *u(k)* из этого выражения, найдем необходимое управление:

$$\frac{\partial(,)}{\partial u(k)} = 0 \Rightarrow u(k) = ?$$

Распишем эту процедуру для линейного объекта:

$$x(k+1) = x(k) + Ax(k)\Delta + Bu(k)\Delta$$

или

$$x(k+1) = (A\Delta + E)x(k) + Bu(k)\Delta\,. \qquad (31)$$

Подставив конкретные выражения, возьмем скалярные произведения и получим общее выражение:

$$x_{табл}(k+1) = (A\Delta + E)x(k) + B\Delta u(k), x_{табл}(k+1) = (A\Delta + E)x(k) + B\Delta u(k)) = x^T{}_{табл}(k+1) =$$
$$x^T(k)(A^T\Delta + E) - u^T(k)B^T\Delta, x_{табл}(k+1) - (A\Delta + E)x(k) + B\Delta u(k) =$$
$$(x^T{}_{табл}(k+1)(x_{табл}(k+1) - (x^T{}_{табл}(k+1)(A\Delta + E)x(k) - (x^T{}_{табл}(k+1)B\Delta u(k) -$$
$$x^T(k)(A^T\Delta + E)(x^T{}_{табл}(k+1) + (x^T(k)(A^T\Delta + E)(A\Delta + E(x(k) +$$
$$x^T(k)(A^T\Delta + E)B\Delta u(k) - u^T(k)B^T\Delta x_{табл}(k+1) + u^T(k)B^T\Delta(A\Delta + E)x(k) + u^T(k)B^T\Delta B\Delta u(k)$$

Возьмем частную производную по $u(k)$:

$$-B^T\Delta x_{табл}(k+1) + B^T(A\Delta + E)\Delta x(k) - B^T\Delta x_{табл}(k+1) +$$
$$B^T(A\Delta + E)\Delta x(k) + B^T B\Delta^2 u(k) + B^T B\Delta^2 u(k) = 0$$

Отсюда, управление окончательно определяется в виде:

$$u(k) = -\frac{1}{2\Delta^2}(B^T B)^{-1}[2B^T\Delta x_{табл}(k+1) - 2B^T(A\Delta + E)\Delta x(k)] =$$
$$-\frac{1}{\Delta^2}(B^T B)^{-1}[-B^T\Delta x_{табл}(k+1) - B^T(A\Delta + E)\Delta x(k)] = \qquad (32)$$
$$\frac{1}{\Delta^2}(B^T B)^{-1}[B^T\Delta x_{табл}(k+1) - B^T(A\Delta + E)\Delta x(k)]$$

Модельный пример синтеза управления в случае предписанной программы движения, заданной в табличной форме. Рассмотрим модельный пример синтеза управления по таблично заданной предписанной программе движения. Пусть математическая модель движения системы описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \end{cases}. \tag{33}$$

При этом в табличном виде задана следующая предписанная программа (траектория) движения (табл. 2).

Таблица 2

Предписанная траектория движения, заданная в табличной форме

t_k	0	1	2	3
x_1	0,5	0,7	0,8	0,4
x_2	0,5	0,71	0,6	0,91

Для нахождения искомых управляющих функций в дискретные моменты времени применим полученное выражение (32).

С использованием (32) проведем 3 итерации по определению искомых законов управления, а также значения вектора состояния при действии этих найденных значений для управляющих функций.

Итак, определим управление $u(0)$, т.е. значение управляющего вектора в момент времени $k = 0$, при начальном положении $x_{10} = 0{,}5$; $x_{20} = 0{,}5$.

Для этого запишем дискретную модель объекта с использованием (33):

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + u_1(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + u_2(k) \end{cases}. \tag{34}$$

В векторно-матричной записи матрицы [A] и [B] имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Согласно (32) имеем:

$$u(0) = \left(\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.71 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.71 \end{bmatrix} \right) =$$
$$- \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.71 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.71 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Подставим в выражение (34) с учетом $k = 1$ значения из (35).

Тогда будем иметь:

$$\begin{cases} x_1(1) = 0.5 + 0.5 - 0.3 = 0.7 \\ x_2(1) = 0.5 + 0.21 = 0.71 \end{cases}. \tag{36}$$

При $k = 2$ имеем:

$$u(1) = -\left(\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0.7\\0.71\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.8\\0.6\end{bmatrix}\right) = -\left[\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7\\0.71\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.8\\0.6\end{bmatrix} = -\left(\begin{bmatrix}1.41\\0.71\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.8\\0.6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.61\\-0.11\end{bmatrix}\right)\right]. \qquad (37)$$

При этом значения компонент вектора состояния:

$$\begin{cases} x_1(2) = 0.7 + 0.71 - 0.6 = 0.8, \\ x_2(2) = 0.71 - 0.11 = 0.6. \end{cases} \qquad (38)$$

При $k = 3$ имеем:

$$u(2) = -\left(\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0.8\\0.6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.4\\0.91\end{bmatrix}\right) = -\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.8\\0.6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.4\\0.91\end{bmatrix}\right) = -\left(\begin{bmatrix}1.4\\0.6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.4\\0.91\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\-0.31\end{bmatrix}, \qquad (39)$$

и вектор состояния принимает значения:

$$\begin{cases} x_1(3) = 0.8 + 0.6 - 1 = 0.4, \\ x_2(3) = 0.6 + 0.31 = 0.91. \end{cases} \qquad (40)$$

Сравнивая выражения (36), (38), (40) с последними 3-мя столбцами таблицы 2, мы видим, что синтезированные законы управления, соответствующие формулам (35), (37), (39), обеспечивают осуществление движения управляемого объекта, согласно (33), по предписанной траектории, заданной в табличной форме (табл. 2).

Выводы. В работе описывается два подхода к синтезу законов управления по осуществлению движения управляемого объекта по предписанной траектории.

В первом предлагается подход к синтезу в случае, когда предписанная траектория задается аналитически. Во втором – когда предписанная траектория задается таблично.

Предлагаемые подходы к синтезу позволяют решать задачи управления не только для класса линейных объектов, но и для широкого класса нелинейных объектов. Процедуры синтеза, как показывают приведенные модельные примеры, достаточны просты и эффективны.

Список литературы

1. Батырканов Ж. И. Адаптивное управление программным движением / Ж. И. Батырканов // Известия Национальной академии наук Кыргызской Республики. Серия физико-технических, математических наук. –2011. – № 2. – С. 144–146.

2. Батырканов Ж. И. Синтез законов управления по осуществлению движения управляемого объекта по предписанной программе / Ж. И. Батырканов, К. К. Кадыркулова // Вестник науки Костанайского социально-технического университета имени академика Зулхарной Алдамжар. – 2013. – № 3. – С. 29–33.

3. Батырканов Ж. И. Траекторное управление объектом по таблично заданным программам / Ж. И. Батырканов, К. К. Кадыркулова // Известия Калининградского государственного технического университета. – 2011 – № 24. – С. 130–132.

4. Беллман Р. Введение в теории матриц / Р. Беллман. – Москва : Наука, 1969. – 368 с.

5. Бойчук Л. М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления / Л. М. Бойчук. – Москва : Энергия, 1971. – 112 с.

6. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Линейные модели // П. Д. Крутько. – Москва : Наука, 1987. – 304 с.

7. Новиков П. В. Алгоритм построения уточненной 4D траектории полета воздушного судна / П. В. Новиков, А. М. Ривкин, Д. В. Арутюнян // Прикаспийкий журнал: управление и высокие технологии. – 2013. – № 1. – С. 50–60.

8. Новикова Е. А. Особенности управления мехатронными приводами с учетом нелинейностей кинематической цепи / Е. А. Новикова / Прикаспийкий журнал: управление и высокие технологии. – 2013. – № 4. – С. 36–42.

9. Тимофеев А. В. Построение адаптивных систем управления программным движением / А. В. Тимофеев. – Ленинград : Энергия, 1988. – 188 с.

10. Фурасов В. Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация / В. Д. Фурасов. – Москва : Наука, 1977. – 248 с.

11. Шаршеналиев Ж. Ш. Синтез систем управления с заданными показателями качества / Ж. Ш. Шаршеналиев, Ж. И. Батырканов. – Бишлек : Илим, 1991. – 174 с.

References

1. Batyrkanov Zh. I. Adaptivnoe upravlenie programmnym dvijeniem [Adaptive control of programmed movement]. *Izvestiya Natsionalnoy akademii nauk Kyrgyzskoy Respubliki. Seriya fiziko-tekhnicheskikh, matema-ticheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic], 2011, no 2 , pp. 144–146.

2. Batyrkanov Zh. I., Kadyrkulova K. K. Syntez zakonov upravlenya po osushestvleniya dvizheniya upravlyaemogo obekta po predpisannoy programme [Synthesis of control laws for the implementation of the controlled object to the prescribed program]. *Vestnik nauki Kostanayskogo sotsialno-tekhnicheskogo universiteta imeni akademika Zulkharnoy Aldamzhar* [Bulletin of the Science of the Kostanai Social Technical University named after Zulharnoy Aldamzhar], 2013, no. 3, pp. 29–33.

3. Batyrkanov Zh. I., Kadyrkulova K. K. Traektornoe upravlenie po tablichno-zadannym programmam [Trajectory control based on table format program]. *Izvestiya Kaliningradskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Proceedings of the Kaliningrad State Technical University], 2011, no. 24, pp. 130–132.

4. Bellman R. *Vvedenie v teoriyu matrits* [Introduction to the theory of matrices], Moscow, Nauka Publ., 1969. 368 p.

5. Boychuk L. M. *Metod strukturnogo synteza nelineynykh system avtomaticheskogo upravleniya* [Structural synthesis method for nonlinear systems of automated control], Moscow, Energiya Publ., 1971. 112 p.

6. Krutko P. D. *Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemykh system: lineynye modeli* [Inverse problem of controlled system dynamics: linear models], Moscow, Nauka Publ., 1987. 304 p.

7. Novikov P. V., Rivkin A. M., Arutyunyan D. V. Algoritm postroeniya utochnennoy 4D traektorii poleta vozdushnogo sudna [Clarifying A 4D algorithm covering allphases of an aircraft's flight path]. *Prikaspiykiy zhurnal: upravlenie i vysokie tekhnologii* [Caspian Journal: Management and High Technologies], 2013, no. 1, pp. 50–60.

8. Novikova Ye. A. Osobennosti upravleniya mekhatronnymi privodami s uchetom nelineynostey kinematicheskoy tsepi [Features of mechatronic drives control taking into account nonlinearities of the kinematic circuit]. *Prikaspiykiy zhurnal: upravlenie i vysokie tekhnologii* [Caspian Journal: Management and High Technologies], 2013, no. 4, pp. 36–42.

9. Timofeev A. V. *Postroenie adaptivnykh system upravleniya programmnym dvizheniem* [The design of adaptive control systems for programmed movement], Leningrad, Energiya Publ., 1988. 188 p.

10. Furasov V. D. *Ustoychivost dvizheniya, otsenki i stabilizatsiya* [Stability of movement, assessment and stabilization], Moscow, Nauka Publ., 1977. 248 p.

11. Sharshenaliev Zh. Sh., Batyrkanov Zh. I. *Sintez system upravleniya s zadannymi pokazatelyami kachestva [*Control system synthesis with prescribed quality parameters], Bishkek, Ilim Publ., 1991. 174 p.