УДК 519.237.5

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ДЛЯ АНАЛИЗА СИГНАЛОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ПУТЕМ, С НЕБОЛЬШИМ КОЛИЧЕСТВОМ ВЫБОРОК

А.К. Чернышов

В статье рассматриваются некоторые методы математической статистики для анализа сигналов, полученных экспериментальным путем, с небольшим количеством выборок. В частности, оценка и анализ проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию согласия Пирсона, а также выборочного коэффициента ранговой корреляции Спирмена и проверка гипотезы о его значимости. Для наглядности и оптимизации данные методы реализованы в среде проектирования LabVIEW корпорации National Instruments.

Актуальность проблемы диагностики сигналов полученных экспериментальным путем, диктуется острой необходимостью организации оперативного безразборного контроля технического состояния машин и механизмов на всех стадиях их жизненного цикла: как на этапах проектирования и изготовления, так и на этапах эксплуатации и ремонта. Сущность проблемы диагностики сигналов, полученных экспериментальным путем, машин и механизмов состоит в разработке и практической реализации алгоритмов оценки параметров технических состояний объекта диагностирования без его разборки в рабочих условиях. При проведении диагностики возникает задача сравнения амплитудных спектров. Необходимо анализировать все составляющие спектра колебаний, причем с максимально возможным разрешением по частоте, что делает визуальное сравнение спектров затруднительным. Единственная возможность быстрого сравнения спектров с большим количеством частот – использование методов математической статистики. В работе будет представлена основа использования методов математической статистики для анализа сигналов, полученных экспериментальным путем, с небольшим количеством выборок, реализованная в среде проектирования LabVIEW[1].

Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена и проверка гипотезы о его значимости[2]

Суть решения задачи заключается в способе оценки сравнения амплитудныех спектров. В качестве примера рассмотрим процедуру сравнения двух спектров на примере ранговой корреляции Спирмена. Допустим, что объекты генеральной совокупности обладают двумя качественными признаками. Под качественным признаком подразумевается признак, который невозможно измерить точно, но он позволяет сравнить объекты между собой, следовательно, расположить их в порядке убывания или возрастания качества. Возьмем 10 значений рангов частот эталонного X и текущего Y спектров ранжированных в порядке ухудшения качества (табл. 1).

Таблица 1

Значения рангов частот эталонного и текущего спектров

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Спектр X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Спектр Y	6	4	8	1	2	5	10	3	7	9

Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена вычисляется по формуле:

$$\rho_B = 1 - \frac{6\sum d^2}{n^3 - n},$$

где n – число частот в спектре, d – разность рангов.

Из таблицы 1 находим разности рангов, квадрат разности рангов и вычисляем сумму квадратов разностей рангов (табл. 2).

Таблица 2

Значения разности рангов и квадрат разности рангов

Номер частоты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Разность рангов d	-5	-2	-5	3	3	1	-3	5	2	1
Квадрат разности рангов d^2	25	4	25	9	9	1	9	25	4	1

В данном случае $n = 10$, а $\sum d^2 = 112$.

Поэтому коэффициент ранговой корреляции Спирмена равен

$$\rho_B = 1 - \frac{6 \cdot 112}{1000 - 10} = 0{,}32$$

На рис. 1 представлена блок-диаграмма, реализованная в среде LabVIEW, для расчета коэффициента ранговой корреляции Спирмена по формуле:

$$r = 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{i=1}^{n} \left(rank\ a_i - rank\ a_{si} \right)^2$$

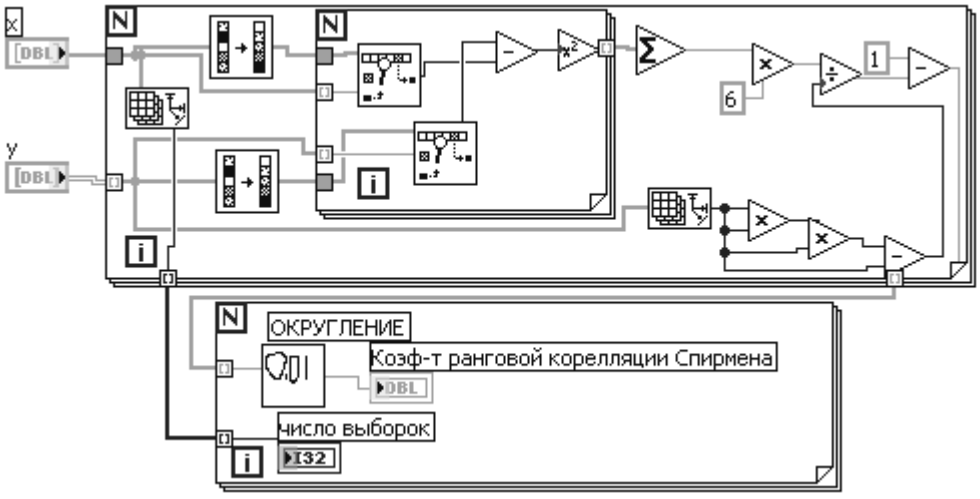

Рис. 1. Расчета коэффициента ранговой корреляции Спирмена

Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена равен +1, когда два спектра полностью совпадают, и -1, когда они взаимно обратны. Если между качественными признаками X и Y нет ни «полной прямой», ни «противоположной» связи, то коэффициент ρ_B

заключен между -1 и 1, причем, чем ближе к нулю его абсолютная величина, тем зависимость меньше.

После вычисления коэффициента ρ_B возникает необходимость при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0 : r_Г = 0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1 : r_Г \neq 0$.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину:

$$T = \rho_B \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho_B^2}} = 0{,}32 \frac{\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0{,}32^2}} = 0{,}77$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости α = 0,05 и числу степеней свободы k = n – 2 найти критическую точку $t_{KP}(\alpha; k) = 2{,}31$ для двусторонней критической области.

Если $|T| < t_{RP}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|T| > t_{RP}$ – нулевую гипотезу отвергают.

Поскольку $|T| < t_{RP}$, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, выборочный коэффициент ранговой корреляции незначимо отличается от нуля, т.е. X и Y некоррелированны. Следовательно, можно сказать, что степень близости двух спектров низкая.

Также ранговая корреляционная связь между признаками вычисляется как

$$T = t(\alpha, k)\sqrt{\frac{1-\rho_B^2}{n-2}}$$

Для реализации вышеописанной процедуры была написана программа, реализованная в среде LabVIEW, которая позволяет вычислить выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена и проверить значимость корреляционной связи (рис. 2).

Рис. 2. Проверка значимости корреляционной связи

Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона[3]

Метод произведений для вычисления выборочных средней и дисперсии. Метод произведений дает удобный способ вычисления условных моментов различных порядков вариационного ряда с равноотстоящими вариантами. Зная же условные моменты, нетрудно найти интересующие нас начальные и центральные эмпирические моменты. В частности, методом произведений удобно вычислять выборочную среднюю и выборочную дисперсию по формулам:

$$\overline{x_B} = M_1^* h + C;$$

$$D_B = \left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right] h^2.$$

где M_1, M_2 – моменты первого и второго порядка, C – числовое значение середины вариационного ряда, h – шаг.

На рис. 3 показана блок-диаграмма для вычисления выборочных средней и дисперсии.

Построение нормальной кривой по опытным данным. Один из способов построения нормальной кривой по данным наблюдений состоит в следующим:

1) находят $\overline{x_B}$ и σ_B, по методу произведений;

2) находят ординаты y_i (выравнивающие частоты) теоретической кривой по формуле $y_i = \dfrac{nh}{\sigma_B} \cdot \varphi(u_i)$, где n – сумма наблюдаемых частот, h – разность между двумя соседними вариантами:

$$u_i = \frac{x_i - \overline{x_B}}{\sigma_B} \text{ и } \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}};$$

3) строят точки (x_i, y_i) в прямоугольной системе координат и соединяют их плавной кривой.

Близость выравнивающих частот к наблюдаемым (рис. 4) подтверждает правильность допущения о том, что обследуемый признак распределен нормально.

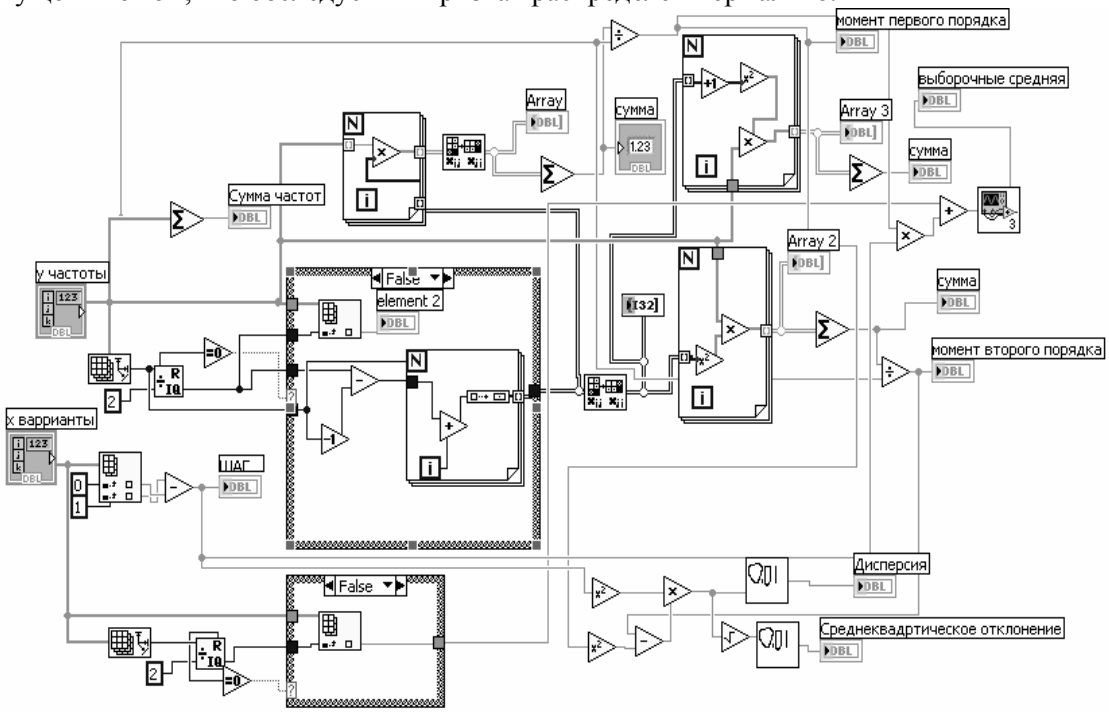

Рис. 3. Вычисление выборочных средней и дисперсии

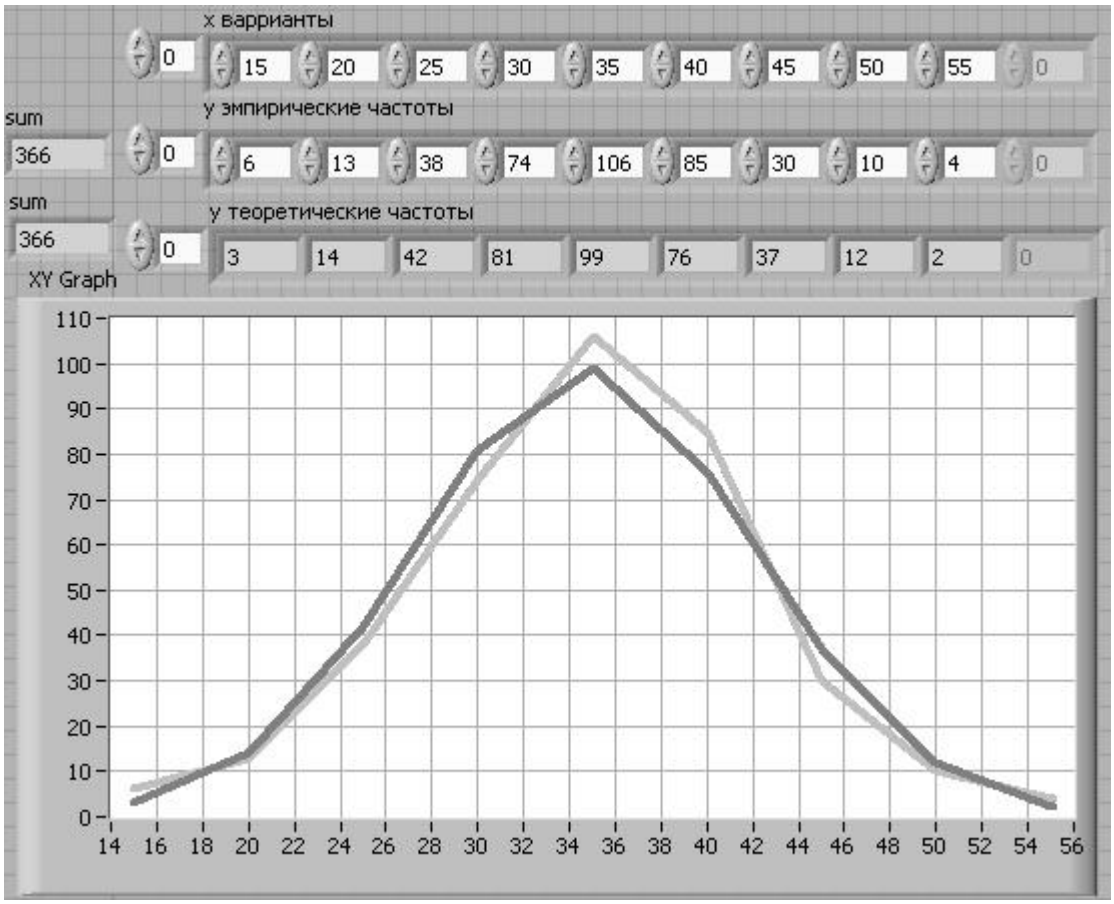

Рис. 4. Проверка близости выравнивающих частот к наблюдаемым

Сравнение двух графиков наглядно показывает, что построенная теоретическая кривая удовлетворительно отражает данные наблюдений.

Критерий согласия Пирсона. Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Критерий Пирсона применим для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Будем сравнивать эмпирические (наблюдаемые) и теоретические (вычисленные в предположении о нормальном распределении) частоты.

Для того чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу H_0 (генеральная совокупность распределена нормально), надо сначала вычислить теоретические частоты, а затем наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{набл} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n_i}$$

и по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s$ – 3найти критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha\,;k)$.

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ – нулевую гипотезу отвергают.

Объединив и реализовав вышеописанные процедуры в среде LabVIEW (рис. 5) получим универсальную программу для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию согласия Пирсона.

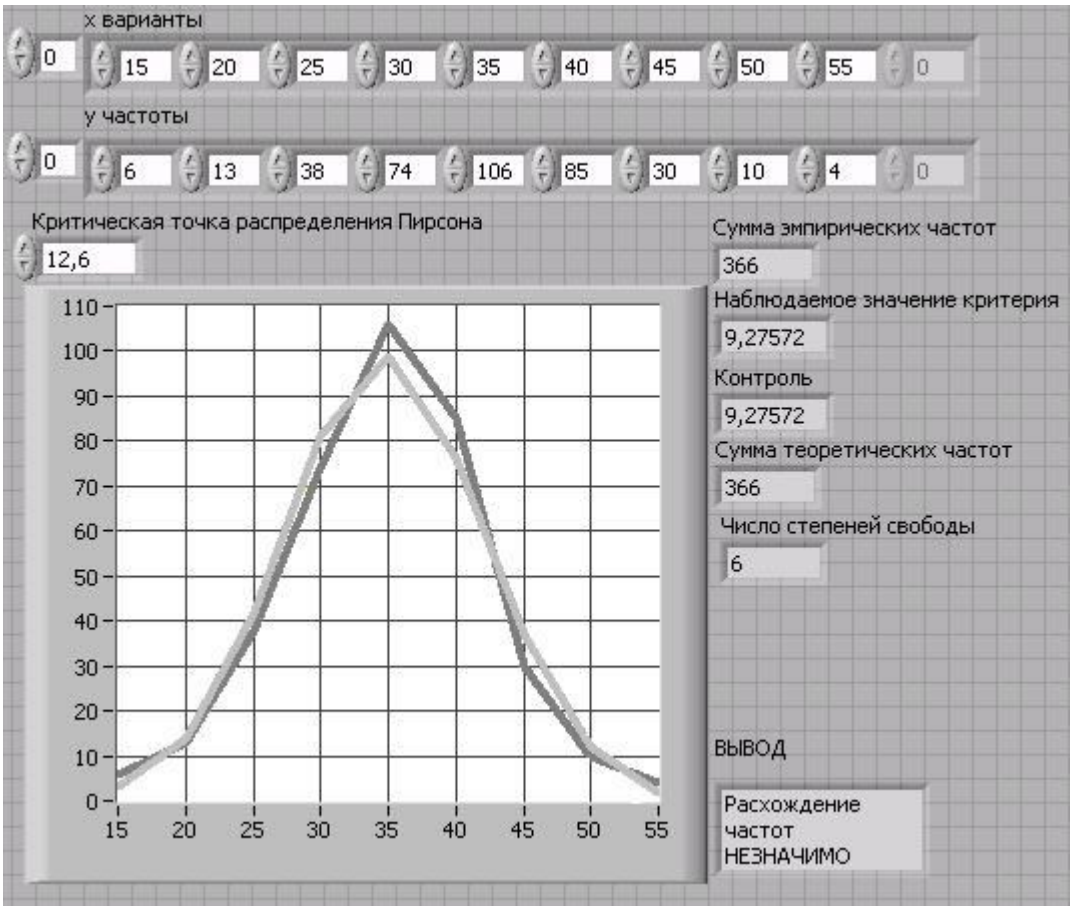

Рис. 5. Интерфейс программы для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию согласия Пирсона

По таблице критических точек распределения x^2, по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = 6$ находим $\chi_{кр}^{\,2}(0{,}05;5) = 12{,}6$.

Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое (рис. 5). Следовательно, данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

---

[1] ***Суранов А.Я.*** LabVIEW 7: Справочник по функциям. М.: ДМК Пресс, 2005. 512 с.

[2] ***Ликеш И.***, ***Ляга Й.*** Основные таблицы математической статистики / Пер. с чешск. М.: Финансы и статистика, 1985. 356 с.

[3] ***Гмурман В.Е.*** Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. 8-е изд., стереотип. М.: Высшая школа, 2002. 479 с.